ФГБОУ ВПО

«Брянская государственная сельскохозяйственная академия»

В.Н. Блохин, И.П. Адылин

Теоретическая механика

«Кинематика»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Брянск 2013

УДК 535

ББК 22.21

Б 68

Блохин В.Н. Теоретическая механика. «Кинематика»/ В.Н. Блохин, И.П. Адылин. – Брянск.: Издательство Брянской ГСХА, 2013. – 172 с.

Учебно – методическое пособие для бакалавров инженерных специальностей.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно – технологического факультета от 22 мая 2013 года, протокол № 9.

Рецензент: д.т.н., профессор кафедры ТОЖиПП Брянской ГСХА А.И. Купреенко.

Глава I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§1. Введение в кинематику

Кинематика – раздел механики, в котором изучается движение материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Методы кинематики применяются для изучения динамики, а так же имеют самостоятельное практическое значение.

Под движением в механике понимается изменение положения тел с течением времени по отношению к другим телам.

Для определения положения тела вводится **система отсчета** (система координат). Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей. Выбор системы отсчета в кинематике произволен.

Движение тел в пространстве происходит с течением времени. Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Все измерения производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерениях принимается 1м. Время в механике течет одинаково во всех системах отсчета. За единицу времени принимается 1 с.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной.

В кинематике применяются аксиомы геометрии.

Чтобы решить задачу кинематики надо задать (описать) движение тела.

Задать движение тела (или закон движения) – значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Существует несколько способов задания движения тела (точки).

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, закон движения точки (тела), установить способы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка, **называется траекторией точки**.

Если траекторией является прямая линия, движение точки называется **прямолинейным**, а если кривая – **криволинейным**.

§2. Способы задания движения точки

Существует три способа задания движения точки.

1. *Векторный*

Пусть точка М движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\bar{r}$, проведенный из начала координат О в точку М (рис.1).

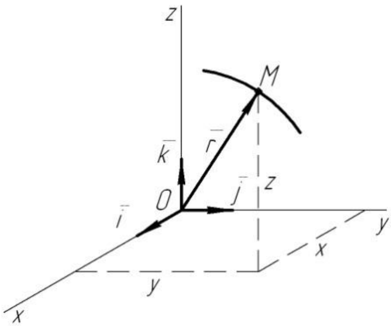


Рис. 1

При движении точки M вектор $\bar{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Значит, $\bar{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad (1)$$

Равенство (1) и определяет закон движения точки в векторной форме.

Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, т.е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Проекциями вектора $\bar{r}$ на координатные оси будут: $r_x = x, r_y = y, r_z = z$(см. рис.1), где x,y,z– декартовы координаты точки M. Если ввести единичные векторы (орты) $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$координатных осей, получим для $\bar{r}$ выражение:

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} \qquad (2)$$

Зависимость $\bar{r}$ от t будет известна, если будут заданы координаты x, y, z точки как функции времени.

Вектор $\bar{r}$ может быть задан его модулем и углами с осями.

2. *Координатный*

Положение точки можно определить ее декартовыми координатами x, y, z в любой момент времени:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), \tag{3}$$

Это есть уравнение движения точки в прямоугольных декартовых координатах или закон движения точки при координатном способе задания движения.

Если движение происходит в плоскости Oxy, то получаем два уравнения движения:

$$x = f_1(t), y = f_2(t) \tag{4}$$

При прямолинейном движении точки вдоль оси Ox законом движения будет одно уравнение:

$$x = f(t) \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) – это уравнения траектории в параметрической форме, где в роли параметра – время t. Исключив из уравнений движения время t, можно найти уравнения траекторий в обычной форме, т.е. в виде, дающим зависимость между координатами точки.

3. *Естественный*

Этим способом удобно пользоваться в том случае, когда траектория движущейся точки известна заранее.

Пусть кривая AB является траекторией точки M при ее движении относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис. 2).

Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определиться криволинейной координатой S, которая равна расстоянию от точки O до точки M. Расстояние S с течением времени меняется, занимая положения M_1, M_2, … точкой M.

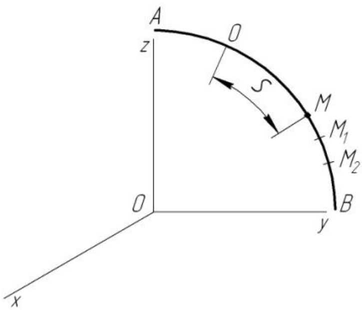


Рис. 2

Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость:

$$S = f(t) \tag{6}$$

Уравнение (6) и есть *закон движения точки M* вдоль траектории.

Чтобы задать движение точки естественным способом, надо знать:

- траекторию точки;
- начало отсчета;
- закон движения точки в виде $S = f(t)$.

Величина S в уравнении движения определяет положение точки M, а не пройденный путь.

§3. Вектор скорости точки

Это одна из основных кинематических характеристик движения точки.

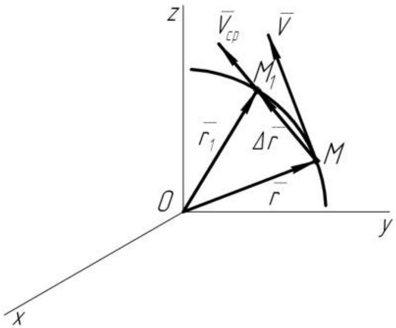


Рис. 3

Введем понятие средней скорости точки: отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую *средней* по модулю и направлению скоростью точки за прошедший промежуток времени Δt:

$$\bar{V}_{ср} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad (7)$$

Направлен вектор $\bar{V}_{ср}$ так же, как и вектор $\overline{MM_1}$ (рис. 3).

Скоростью точки в данный момент времени tназывается векторная величина $\bar{V}$, к которой стремится средняя скорость $\bar{V}_{ср}$ при стремлении промежутка времениΔt к нулю:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0}(V_{ср}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}, или$$

$$(8)$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени.

Вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

При прямолинейном движении вектор скорости $\bar{V}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка и может изменяться лишь численно.

Единицей измерения являются м/с или км/ч.

§4. Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки. Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ движущая точка из положения M переместилась в положение M_1.Тогда скорость точки получает приращение

$$\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}$$

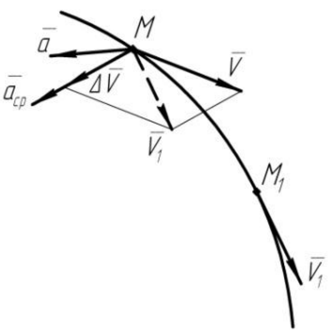


Рис. 4

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\bar{V}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки (рис. 4):

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} \tag{9}$$

Тогда:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \tag{10}$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Размерность ускорения L/T^2: единицей измерения обычно применяется м/с^2.

При прямолинейном движении вектор $\bar{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор $\bar{a}$ лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону вогнутости.

В общем случае вектор ускорения $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

§5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

1. Определение скорости точки

Так как $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ и, учитывая, что $r_x = x, r_y = y,\ r_z = z$, находим:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt} \tag{11}$$

или

$$V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z} \tag{12}$$

Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, можно найти ее модуль и направление:

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \\ \cos\alpha &= \frac{V_x}{V}, \cos\beta = \frac{V_y}{V}, \cos\gamma = \frac{V_z}{V} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

где углы α, β, γ, которые вектор $\bar{V}$ образует с координатными осями.

2. Определение ускорения точки

Так как вектор ускорения точки $\bar{a} = d\bar{V}/_{dt}$, то имеем:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{14}$$

или

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \tag{15}$$

т.е. проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направления ускорений найдутся из формул:

$$\left.\begin{array}{c} a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}; \\ \cos\alpha=\frac{a_x}{a}, \cos\beta=\frac{a_y}{a}, \cos\gamma=\frac{a_z}{a} \end{array}\right\}, \qquad (16)$$

где α, β, γ – углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

В случае движения точки в одной плоскости

$$a_x=\dot{V}_x=\ddot{x}, a_y=\dot{V}_y=\ddot{y}, a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad (17)$$

В случае прямолинейного движения

$$V_x=\dot{x}, a_x=\ddot{a} \qquad (18)$$

§6. Решение задач кинематики точки

Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости или ускорения точки, нахождении времени, в течение которого точка проходит тот или иной путь или пути, проходимого за тот или иной промежуток времени, и т.п.

Прежде чем решать задачу, надо установить, по какому закону движется точка. Этот закон может быть задан в условии задачи или же из условий задачи определен.

Задача 1. Движение точки задано уравнениями (x, y – в метрах, t – в секундах): $x = 2t, y = 4t^2$. Определить траекторию, а также скорость и ускорение точки через время t=0,5 с. после начала движения.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t: $t = \frac{x}{2}$, подставив во второе уравнение,

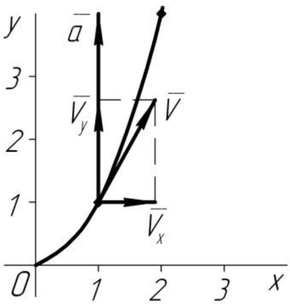


Рис. 5

получим $y = x^2$. Следовательно, траекторией движения точки является парабола. Найдем положение точки на кривой через время t=0,5 с. после начала движения. Это будет точка с координатами$x = 1, y = 1$, т.е. М(1;1).

Определим скорость точки. По формулам (12) имеем:

$$V_x = \dot{x} = 2, \qquad V_y = \dot{y} = 8t, \qquad V_y = 4\frac{м}{с}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4{,}5\frac{м}{с}.$$

Теперь найдем ускорение точки. По формулам (15) имеем:

$$a_x = \ddot{x} = 0\frac{м}{с}, a_y = \ddot{y} = 8\frac{м}{с}, a = a_y = 8\frac{м}{с}.$$

Вектор скорости $\bar{V}$ направлен по касательной с учетом

$V_x > 0$ и $V_y > 0$. Вектор ускорения $\bar{a}$ направлен в сторону вогнутости кривой и $\bar{a} \parallel Oy$.

§7. Оси естественного трехгранника. Числовое значение скорости

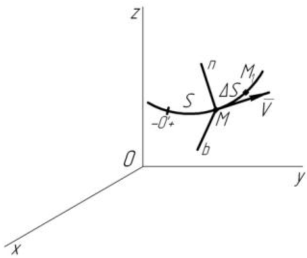


Рис. 6

При естественном способе задания движения, т.е. когда заданы траектория точки и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $S = f(t)$, можно вычислить скорость и ускорение точки не по их проекциям на оси системы отсчета $Oxyz$, а на подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке М и движущиеся вместе с нею (рис.6). Эти оси называются *осями естественного трехгранника* и направлены: ось $M\tau$– по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния S; ось Mn – по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории (рис. 6); ось Mb – перпендикулярно к первым двум так, чтоб она образовала с ними правую систему осей. Нормаль Mn называется *главной нормалью;* нормаль Mb – *бинормалью*.

Скорость точки направлена по касательной в сторону движения, т.е. определяется в осях $M\tau nb$ только одной проекцией $V\tau$ на ось $M\tau$. $V\tau$ или совпадает с модулем скорости V, или отличается от V только знаком.

Значение скорости V за промежуток времени Δt определяется

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ или } V = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \qquad (19)$$

Таким образом, числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) S этой точки по времени.

Величина V одновременно определяет и модуль скорости, и сторону, куда она направлена.

§8. Касательное и нормальное ускорения точки

Ранее было установлено, что ускорение $\bar{a}$ точки лежит в соприкасающейся плоскости $M\tau n$. Тогда $a_b = 0$, т.е. проекция вектора $\bar{a}$на бинормаль M_b равна нулю. Проекция равенства:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

на оси $M\tau$ и Mn даст:

$$a_\tau = \frac{(d\bar{V})\tau}{dt}, a_n = \frac{(d\bar{V})n}{dt}. \qquad (20)$$

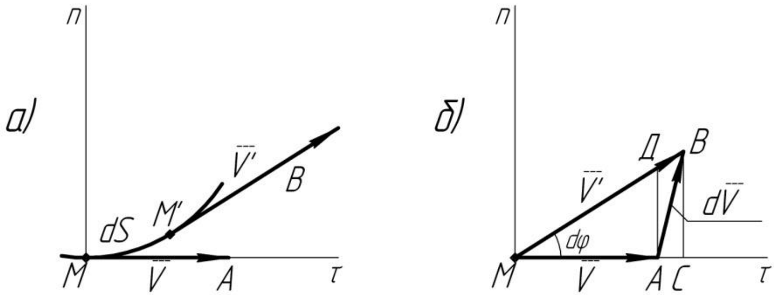


Рис. 7

Вектор $d\bar{V}$ есть разность между скоростями в двух соседних точках M и M' (рис. 7, а), т.е.:

$d\bar{V} = \bar{V}' - \bar{V}$, *или* $d\bar{V} = \overline{AB}$ (рисунок 7, б).

Тогда фигуру АСВД при бесконечно малом угле $d\varphi$ можно рассматривать как прямоугольник.

Отсюда:

$$(d\bar{V})\tau = AC = ДB = MB - MA = V' - V = dV,$$

где: dV – элементарное приращение числового значения скорости.

Тогда $(d\bar{V})n = АД = МА \cdot d\varphi = Vd\varphi$.

Представляя найденные значения $(d\bar{V})\tau$ и $(d\bar{V})n$ в равенства (20), получим:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \; a_n = V\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (21)$$

Угол между касательными к кривой в двух её соседних точках называется *углом смежности*; $d\varphi$ - элементарный угол смежности.

Отношение $d\varphi$ к $dS = \breve{M}\breve{M}'$, определяет кривизну кривой в точке M, а кривизна k является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в этой точке, т.е.

$$\frac{d\varphi}{dS} = k = \frac{1}{\rho}. \qquad (22)$$

Тогда $a_n = V\frac{d\varphi}{dt} = V\frac{d\varphi}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = V \cdot \frac{1}{\rho} \cdot V = \frac{V^2}{\rho}$.

В результате окончательно получаем:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \; a_n = \frac{V^2}{\rho}, \; a_b = 0. \qquad (23)$$

Равенства (23) выражают одну из важных теорем кинематики. Величины a_τ *и* a_n называют *касательным и нормальным* ускорениями точки.

При движении точки в одной плоскости касательная M_τ поворачивается вокруг бинормали M_b с угловой скоростью $\omega = {}^{d\varphi}/_{dt}$. Тогда

$$a_n = V\omega. \qquad (24)$$

Эта формула часто используется в инженерной практике.

Отложим вдоль касательной M_τ и главной нормали M_n векторы $\bar{a}_\tau$ *и* $\bar{a}_n$, т.е. касательную и нормальную составляющие ускорения (рис. 8).

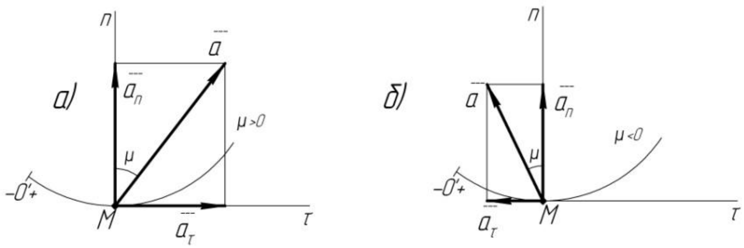


Рис. 8

При этом составляющая $a_n > 0$ и направлена всегда в сторону вогнутости кривой, а составляющая a_τ может быть направлена, в зависимости от знака, в любом направлении оси M_τ.

Вектор ускорения точки $\bar{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\bar{a}_\tau$ *и* $\bar{a}_n$ и численно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}, tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \quad (25)$$

где: $-\frac{\pi}{2} \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, если движение точки задано естественным способом, то, зная траекторию (а, следовательно, и ее радиус кривизны ρ в любой точке) и закон движения, т.е. зависимость $S = f(t)$, можноопределить модуль и направление векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени.

§9. Частные случаи движения точки

1. *Прямолинейное движение*

Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = {V^2}/{\rho} = 0$ и все ускорения точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad (26)$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.*

2. *Равномерное прямолинейное движение*

Равномерным криволинейным движением точки называется такое, в котором числовое значение скорости все время остается постоянным – $V = const$. Тогда $a_\tau = {}^{dV}/_{dt} = 0$ и все ускорение точки равно только нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}. \qquad (27)$$

Вектор ускорения $\bar{a}$ направлен все время по нормали к траектории точки.

Так как в этом случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению*.

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Так как $dS = Vdt$, то в начальный момент времени ($t = 0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии S_0. Беря интегралы в соответствующих пределах, получим $\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t Vdt$ *или* $S - S_0 = Vt$, так как $V = const$. Окончательно имеем:

$$S = S_0 + Vt. \qquad (28)$$

При равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость точки равна отношению пути ко времени:

$$S = Vt, \ V = \frac{S}{t}. \tag{29}$$

3. *Равномерное прямолинейное движение*

В этом случае $a_n = a_\tau = 0$, а значит, и $a = 0$. Это единственное движение, в котором ускорение точки все время равно нулю.

4. *Равномерное криволинейное движение*

Это такое движение, при котором касательное ускорение остается все время постоянным – $a_\tau = const$. Применяя формулу $dV = a_\tau dt$ и беря интегралы от обеих частей в соответствующих пределах, получим закон движения:

$$V = V_0 + a_\tau t. \tag{30}$$

Так как ${dS}/{dt} = V_0 + a_\tau t$ или $dS = V_0 dt + a_\tau t dt$, то интегрируя это выражение получим закон равнопеременного криволинейного движения точки:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{31}$$

Рис. 9

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает – замедленным или движение будет ускоренным, если величины V и a_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами $\bar{V}$ и $\bar{a}$ острый, рис. 9, а) и замедленным, если разные (угол между векторами $\bar{V}$ и $\bar{a}$ тупой, рис. 9, б).

Если в равенстве – $V = V_0 + a_\tau t$ –V и a_τ имеют одинаковые знаки, движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки – *равнозамедленным*.

5. Гармонические колебания

Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону:

$$x = A\cos kt, \tag{32}$$

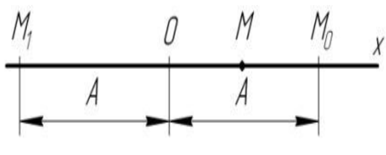


Рис. 10

где A и k - постоянные величины. Точка М (рис. 10) при этом совершает колебания между точками M_0 и M_1. Колебания, происходящие по закону (32), играют большую роль в технике, и называется **гармониче-**

скими колебаниями. Величина A, равная наибольшему отклонению точки от центра O, называется **амплитудой** колебаний.

Очевидно, что начиная движение в момент $t = 0$ из M_0, точка вновь придет в это положение в момент времени t_1, для которого $cos k t_1 = 1$, т.е. $k t_1 = 2\pi$.

Промежуток времени $T = t_1 = \frac{2\pi}{k}$, в течении которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний.

Беря производные от x *по* t, найдем значения скорости и ускорения точки:

$$V = V_x = -Ak sin kt, a = a_x = -Ak^2 cos kt. \qquad (33)$$

Как видно из уравнения (33), скорость и ускорение изменяются по гармоническому закону. По знакам V и a видно, что когда точка движется к центру колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний – замедленным.

Аналогичные колебания происходят и по закону $x = A sin kt$, только движение в этом случае начинается из центра O.

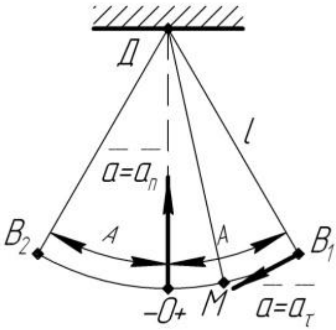


Рис. 11

Задача. При небольших углах отклонения груз маятника (рисунок 11) движется по окружности радиуса l по закону $S = A\sin kt$ (начало координат в точке О). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения груза и те положения, в которых постоянные величины A и k обращаются в нуль.

Решение. По известным формулам находим:

$$V = \dot{S} = Ak\cos kt;$$

$$a_\tau = \dot{V} = -Ak^2\sin kt;$$

$$a_n = \frac{V^2}{l} = \frac{A^2k^2}{l}\cos^2 kt.$$

И так груз совершает гармонические колебания с дуговой амплитудой A. В крайних положениях (в точках B_1 и B_2) $\sin kt = \pm 1$, а следовательно, $\cos kt = 0$. Поэтому скорость и нормальное ускорение в этих точках имеет максимальное значение $a_\tau^{max} = Ak^2$.

Когда груз проходит через точку O, то $S = 0$ и, следовательно, $sinkt = 0$, а $coskt = 1$. В этом положении $a_\tau = 0$, а V и a_n имеют максимальные значения: $V_{max} = Ak$, $a_n^{max} = \frac{A^2 k^2}{l}$.

Из примера видно, что при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории a_τ или a_n могут обращаться в нули: $a_\tau = 0$, если $dV/dt = 0$, т.е. там, где V имеет максимум или минимум; $a_n = 0$, когда $V = 0$ или $\rho = \infty$ (точка перегиба траектории).

§10. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

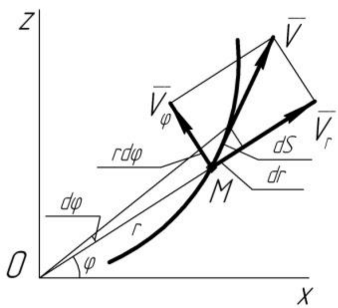


Рис. 12

Когда точка движется в одной плоскости, то ее положение можно определять полярными координатами r и φ (рис. 12). При движении точки эти координаты с течением времени изменяются. Законом движения точки в полярных координатах будет:

$$r = f_1(t), \varphi = f_2(t). \tag{34}$$

Так как $V = \frac{dS}{dt}$,

где dS – перемещение, получаемое из сложения радиального и поперечного перемещений.

Следовательно, скорость V будет геометрически слагаться из радиальной скорости $\bar{V}_2$ и поперечной скорости $\bar{V}_\varphi$, численно равных:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}. \tag{35}$$

Так как $\bar{V}_r \perp \bar{V}_\varphi$, то по модулю

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}, \tag{36}$$

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}, \tag{37}$$

где: $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = a_r$;

$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = a_\varphi$.

.

Глава II
ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§11. Поступательное движение

Рассмотрим поступательное движение твердого тела.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается параллельно самой себе.

Нельзя путать поступательное движение с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Например, движение кабины колеса «обозрения», движение поршня относительно цилиндра и др.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

<u>*Доказательство*</u>. Рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис. 13).

Положение точек Aи B определяется радиус-векторами $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$. Тогда:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (38)$$

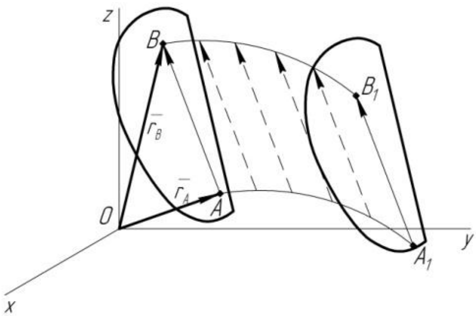


Рис. 13

При этом длина AB и направление $\overline{AB}$ остаются неизменными ($\overline{AB} = const$). А это значит, что траектория точки B получается из траектории точки A. Следовательно, траектории точек A и B будут одинаковыми (при наложении совпадут).

Для определения скоростей точек A и B продифференцируем уравнение (38) по времени:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора $\overline{AB}$ равна нулю. Значит $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$ или $\bar{V}_A = \bar{V}_B$, скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению.

Теперь беря производные по времени от обеих частей последнего равенства, получим:

$$\frac{d\bar{V}_A}{dt} = \frac{d\bar{V}_B}{dt} \text{или } \bar{a}_A = \bar{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и по направлению.

Таким образом, теорема доказана.

Скорости и ускорения точек движущегося тела образуют векторные поля – поле скоростей и поле ускорений точек тела.

Из доказанного следует, что поля скоростей и ускорений точек тела, движущегося поступательно, будут однородными (рис. 14), но вообще не стационарными, т.е. изменяющимися во времени.

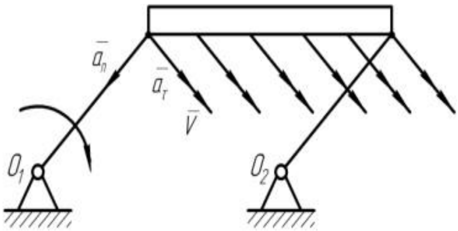


Рис. 14

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки.

Вектор $\bar{V}$ и $\bar{a}$можно изображать приложенными к любой его точке.

§12. Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются во все время движения неподвижными (рис. 15). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения*. При вращательном движении, все точки, лежащие на оси, остаются неподвижными, а все остальные будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

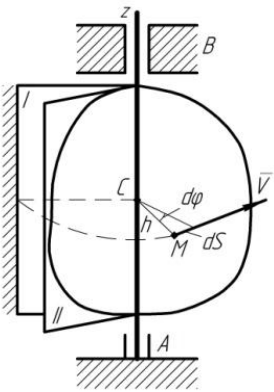


Рис. 15

Положение вращающегося тела определяется, в любой момент времени, углом φ, взятым с соответствующим знаком (см. рис. 15).

Угол φ считается положительным, если с положительного направления оси z виден поворот тела, происходящий против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t, т.е.:

$$\varphi = f(t), \tag{39}$$

где φ будем измерять в *радианах*.

Уравнение (39) есть *закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела является его угловая скорость ω и угловое ускорениеε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью будет:

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}. \tag{40}$$

Числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени.

Знак ω определяется направлением вращения тела. Если вращение происходит против хода часовой стрелки, то $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$. Размерность угловой скорости 1/T (т.е. 1/время). Обычно применяют рад/с или, что то же, 1/с (c^{-1}), так как радиан величина безразмерная.

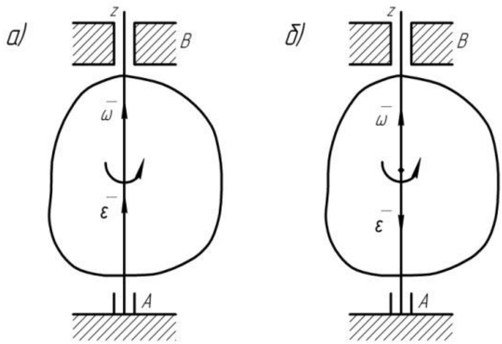


Рис. 16

Угловая скорость тела может изображаться и в виде вектора $\bar{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту же сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 16).

Такой вектор сразу определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \qquad (41)$$

Числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения $1/T^2$ (1/время^2). Обычно измеряется рад/с^2 или, что то же, 1/с^2 ($с^{-2}$).

Если угловая скорость ω возрастает, то вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет ускоренным, если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным – когда разные.

Угловое ускорение величина векторная:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}. \qquad (42)$$

§13. Равномерное и равнопеременное вращение

Если угловая скорость тела во все время движения остается постоянной ($\omega = const$), то вращение тела называется *равномерным.* Так как $d\varphi = \omega dt$ и в начальный момент времени $t = 0$ и угол $\varphi = \varphi_0$, то законом равномерного вращения будет:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{43}$$

При $\varphi_0 = 0$ получаем:

$$\varphi = \omega t \text{ и } \omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{44}$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин – по размерности это угловая скорость. Зависимость n от ω будет следующей:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n. \tag{45}$$

Так как при одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$ и поворот происходит за время $t = 1 \text{ мин} = 60\text{с}$.

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon = const$), то вращение называется *равнопеременным.*

Учитывая, что $d\omega = \varepsilon dt$ и интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую – в пределах от 0 до t, получим:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{46}$$

Так как $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$ или $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$, то интегрируя, получим закон равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{47}$$

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

§14. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

1. Скорости точек тела. Рассмотрим точку М твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рисунок 15). При вращении точка М будет описывать окружность и при повороте на угол $d\varphi$ за время dt совершит перемещение $dS = hd\varphi$. Тогда числовое значение скорости будет:

$$V = \frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или}$$

$$V = h\omega. \tag{48}$$

Скорость V называется **линейной** или **окружной** скоростью точки М. **Числовое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения**.

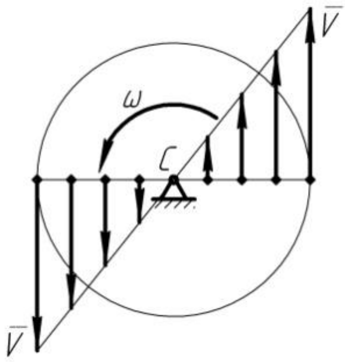


Рис. 17

Направлена скорость по касательной к описываемой окружности. Скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения, так как угловая скорость ω в данный момент времени для всех точек тела имеет одно и то же значение (рис. 17). Поле скоростей вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рисунке 17.

2. Ускорение точек тела. Для нахождения ускорения точки М воспользуемся формулами $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{\rho}$. В нашем случае $\rho = h$.

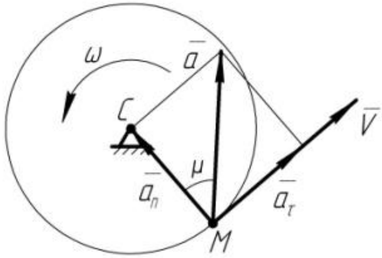
Подставляя значение $V = h\omega$ в выражения a_τ и a_n, получим:

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, a_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_\tau = h\varepsilon, a_n = h\omega^2. \qquad (49)$$

Касательное ускорение a_τ направлено по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону, при замедленном). Нормальное ускорение $\bar{a}_n$ всегда направлено по радиусу МС к оси вращения (рис. 18). Полное ускорение точки М будет:



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (50)$$

или

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Рис. 18

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса определяется углом μ:

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (51)$$

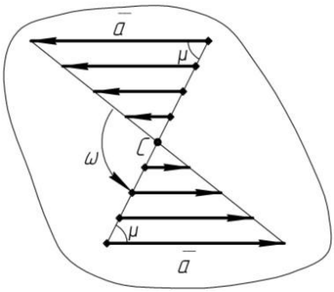


Рис. 19

Так как ε и ω имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то согласно формулам (50) и (51) следует, что ускорения всех точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами вращения (рис. 19). Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рисунке 19.

Формулы (48) – (51) позволяют определить скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела и расстояние данной точки от оси вращения. Зная закон движения одной точки тела, можно определить движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом.

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Из рисунка 20 видно, что $h = r sin\alpha$ и согласно формуле $V = h\omega$

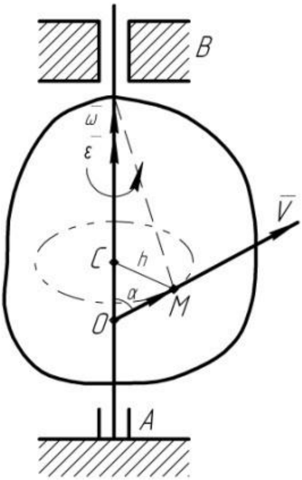


Рис. 20

имеем $|V| = |\omega| h = |\omega| r sin\alpha$ или $|V| = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$. Модуль векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ равен модулю скорости точки М. Направления этих векторов тоже совпадают (оба перпендикулярны плоскости OMB) и размерности их одинаковы.

Следовательно,

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{52}$$

Вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Формулу $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ называют формулой Эйлера.

Беря производную от обеих частей равенства (52) по времени, получим $\frac{d\bar{V}}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$ или

$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{V}). \tag{53}$$

Вектор $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ направлен, как и вектор $\bar{\omega} \times \bar{r}$, т.е. по касательной к траектории точки М, а $|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r sin\alpha = \varepsilon h$. Вектор $\bar{\omega} \times \bar{V}$ направлен вдоль МС, т.е. по нормали к траектории точки М, а $|\bar{\omega} \times \bar{V}| = \omega V sin 90° = \omega^2 h$, так как $V = \omega h$. Учитывая все эти формулы и формулы (49), заключаем, что $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_\tau$ и $\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{a}_n$.

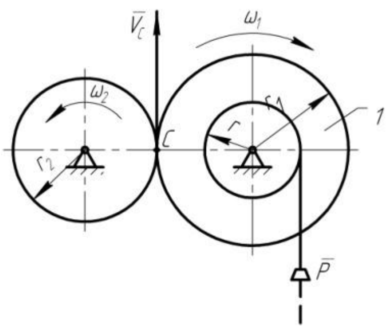


Рис. 21

Задача. Груз P (рис. 21) приводит во вращение вал радиусом $r = 0{,}1$ м и сидящую на одной оси с валом шестерню 1, радиусом $r_1 = 0{,}2$ м. Движение груза начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2. Определить, по какому закону будет при этом вращаться, находящаяся в зацеплении с шестерней 1, шестерня 2, радиусом $r_2 = 0{,}16$ м.

Решение. Так как $a = const$, то $V_p = at = 0{,}4t$. Эту скорость будут иметь и точки, лежащие на поверхности вала и скорости этих точек равны $\omega_1 r$, где ω_1 – общая для вала и шестерни 1 угловая скорость. Следовательно, $\omega_1 r = at, \omega_1 = \frac{at}{r} = 4t$.

Найдем угловую скорость ω_2 второй шестерни. Скорость V точки сцепления С должна быть одной и той же для обеих шестерен, т.е. $V_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, откуда $\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{4t \cdot 0{,}1}{0{,}16} = 2{,}5t$.

Учитывая, что $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, где φ_2 – угол поворота шестерни 2, т.е. $\frac{d\varphi_2}{dt} = 2{,}5t, d\varphi_2 = 2{,}5t \cdot dt$.

Беря от обеих частей интегралы и считая, что при $t = 0$, угол $\varphi_2 = 0$, найдем окончательно закон равноускоренного вращения шестерни 2 в виде $\varphi_2 = 1{,}25t^2$.

Глава III

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§15. Уравнения плоскопараллельного движения (движения плоской фигуры). Разложение движения на поступательное и вращательное.

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости П (рис. 22). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например, катящееся колесо по прямолинейному участку, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др.

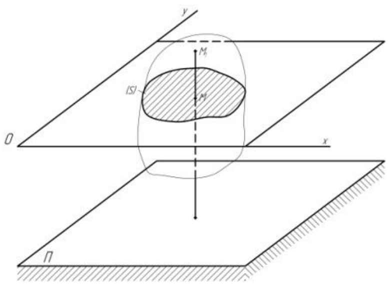


Рис. 22

Для изучения движения всего тела достаточно изучить движение в плоскости Oxy некоторой плоской фигуры S. Поэтому для изучения плоского движения достаточно изучить движение плоской фигуры в какой-то плоскости.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением произвольного отрезка АВ (рисунок 23). А положение отрезка можно определить, зная координаты x_A, y_A точки А и

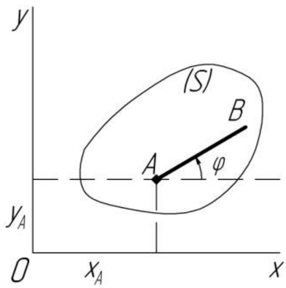


Рис. 23

угол φ, который отрезок АВ образует с осью x.

Точку А, выбранную для определения положения фигуры S, будем называть *полюсом*.

Чтобы знать закон движения тела, надо знать зависимость в любой момент времени для плоскости Oxy:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi_A = f_3(t). \qquad (54)$$

Эти уравнения (54) – есть уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Очевидно, что уравнения $x_A = f_1(t)$ и $y_A = f_2(t)$, при $\varphi = const$, описывают поступательное движение тела, а уравнение $\varphi = f_3(t)$, при $x_A = const$ и $y_A = const$, т.е. когда полюс неподвижен, описывает вращение фигуры вокруг полюса А. Отсюда заключаем, что в общем случае *движения плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающее из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса.*

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\bar{V}_{пост} = \bar{V}_A$, $a_{пост} = a_A$), а так же угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

При изучении движения можно в качестве полюса выбрать любую точку фигуры и вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

§16. Определение скоростей точек плоской фигуры

При плоскопараллельном движении твердого тела скорость любой точки М фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в поступательном и вращательном движениях.

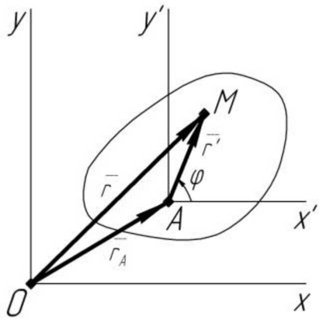


Рис. 24

Положение любой точки М в осях Oxy определяется радиус-вектором $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$ (рис. 24), где $\bar{r}_A$– радиус-вектор полюса А, $\bar{r}' = \overline{\mathrm{AM}}$ – вектор, определяющий положение точки М, относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом а поступательно. Тогда $V_{\mathrm{M}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}$, где $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_A$ есть скорость полюса А; величина же $\frac{d\bar{r}'}{dt}$ равна скорости $\bar{V}_{MA}$, которую тоска М получает при $\bar{r}_A = const$, т.е. *при вращении фигуры вокруг полюса А.*

Таким образом

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}, \qquad (55)$$

где: $V_{MA} = \omega \cdot MA(\bar{V}_{MA} \perp \overline{MA})$;

ω – угловая скорость фигуры.

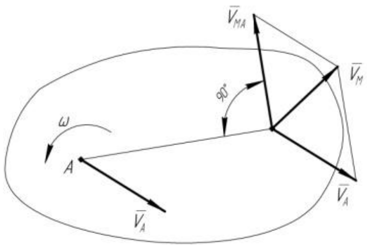


Рис. 25

Таким образом, *скорость любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.*

Модуль и направление скорости $\bar{V}_M$ находится построением соответствующего параллелограмма (рисунок 25).

§17. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Исходя из уравнения $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}$, можно получить удобный и простой метод определения скоростей точек плоской

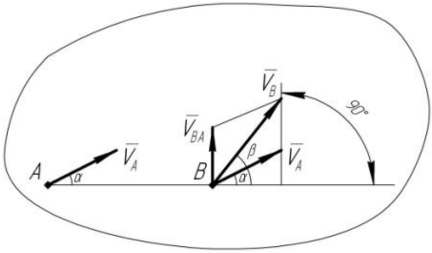


Рис. 26

фигуры. Один из таких методов дает теорема: *проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.*

Возьмем произвольные две точки А и В плоской фигуры (рис. 26). Если точку А взять за полюс, то $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$.

Проектируя это равенство на ось, направленную по АВ, и учитывая, что $\bar{V}_{BA} \perp$ AB, находим

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha, \qquad (56)$$

и теорема доказана. Равенство (56) выполняется не только при плоскопараллельном движении твердого тела, но и при любом другом.

Доказанная теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление скорости этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

Задача. Определить скорость точки В четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке 26, если звено ОА длины 0,25 м имеет в данный момент угловую скорость $\omega = 2$ рад/с.

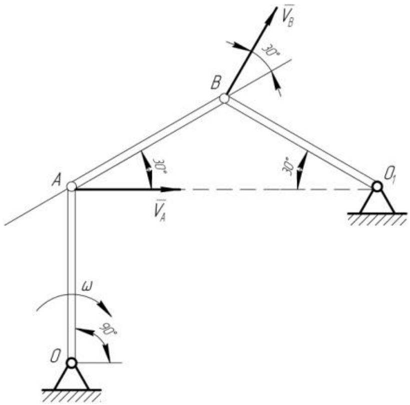


Рис. 27

Решение. Определим сначала скорость точки А:

$$V_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Так как скорость точки В направлена перпендикулярно O_1B, т.е. $\overline{V}_B \perp O_1B$ и вектор $\overline{V}_B$ составляет с прямой АВ угол в $30°$, то

$$V_A cos30° = V_B cos30°.$$

Отсюда следует, что $V_A = V_B = 0{,}5$ м/с.

§18. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

Это другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что такая точка в каждый момент времени существует и притом единственная, если фигура движется не поступательно. Пусть в момент времени t точки А и В имеют скорости $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, не параллельные друг другу (рисунок 28).

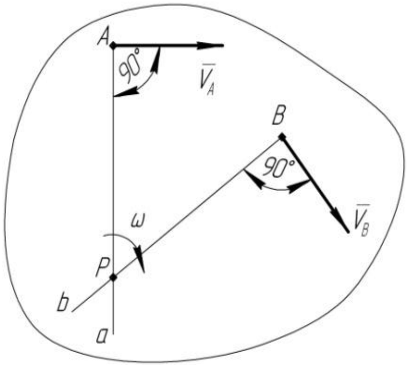


Рис. 28

Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров A_a к вектору $\bar{V}_A$ и B_B к вектору $\bar{V}_B$, и будет мгновенным центром скоростей , так как $\bar{V}_P = 0$. Если за полюс взять точку P, то по формуле (55) скорость точки A будет $\bar{V}_A = \bar{V}_P + \bar{V}_{PA} = \bar{V}_{PA}$, так как $V_P = 0$. Для любой другой точки фигуры результат будет аналогичный: *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.*

Так же очевидно, что

$$V_A = \omega \cdot PA(\bar{V}_A \perp PA); V_B = \omega \cdot PB(\bar{V}_B \perp PB) \qquad (57)$$

и т.д.

Из этих равенств следует, что

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}. \qquad (58)$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1) *Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направление скоростей* $\bar{V}_A$ *и* $\bar{V}_B$ *каких-нибудь двух точек А и В плоской фигуры*; мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек А и В к скоростям этих точек.

2) Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки А фигуры и направление скорости другой ее точки В.

3) Угловая скорость ω *плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей Р:*

$$\omega = \frac{V_B}{PB}. \qquad (59)$$

Рассмотрим частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

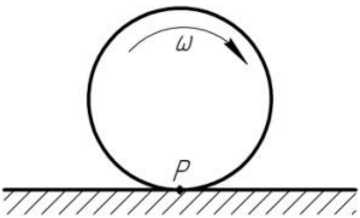


Рис. 29

а) Если плоское движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка Р катящегося, касающаяся неподвижной поверхности (рисунок 29), имеет в данный момент времени скорость, равную нулю $V_P = 0$, и, следовательно, является мгновенным центром скоростей.

Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если скорости точек А и В плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия АВ не перпендикулярна $\bar{V}_A$ (рис. 30), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\bar{V}_A$. По теореме о проекциях скоростей $V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha$ следует, что $V_B = V_A$, так как $\beta = \alpha$. Следовательно,

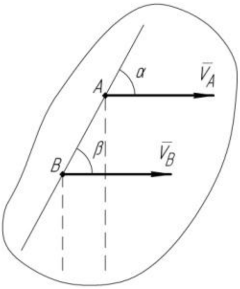


Рис. 30

скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению. Значит, фигура имеет мгновенно поступательное распределение скоростей (тело движется мгновенно поступательно). Угловая скорость ω тела в этот момент времени равна нулю.

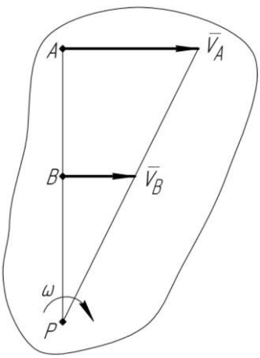


Рис. 31

в) Если скорости точек А и В плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия АВ перпендикулярна $\bar{V}_A$ (рис. 31), то мгновенный центр скоростей Р определяется как показано на рисунке 31.

Справедливость построения следует из пропорции

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}.$$

В этом случае для нахождения центра Р надо кроме направлений знать еще и модули скоростей $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$.

г) Если скорости точек А и В параллельны, но направлены в разные стороны и прямая АВ перпендикулярна векторам $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ (рис. 32), то мгновенный центр скоростей определяется как показано на рисунке 32.

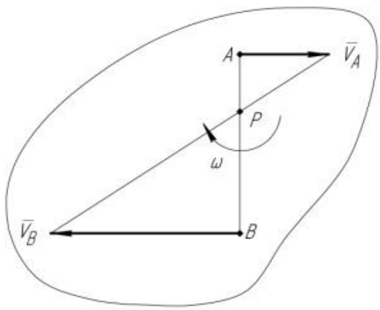


Рис. 32

Для нахождения центра Р надо кроме направлений знать еще и модули скоростей $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$.

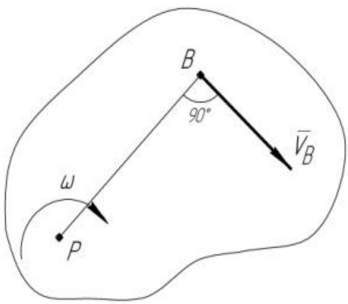


Рис. 33

д) Если известны вектор скорости $\bar{V}_B$ какой-нибудь точки В фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей Р, лежащего на перпендикуляре к $\bar{V}_B$ (рис. 33), можно найти из равенства $V_B = \omega \cdot PB$. Откуда $PB = \frac{V_B}{\omega}$.

§19. Мгновенный центр вращения центроиды

При плоском движении тела скорости его точек распределены в каждый момент времени так, как если бы движение этой фигуры представляло собой вращение вокруг центра Р. Поэтому точку, совпадающую с мгновенным центром скоростей называют *мгновенным центром вращения,* а ось Pz, перпендикулярную сечению S тела, – *мгновенной осью вращения тела.* Эта ось Pz все время меняет свое положение с течением времени (рис. 34).

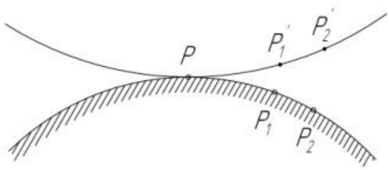


Рис. 34

В связи с этим можно дать другое определение плоского движения тела: *плоскопараллельное движение слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг непрерывно меняющих свое положение мгновенных осей (или центров) вращения.*

Например, качение колеса (рис. 29) по рельсу. При движении плоской фигуры мгновенный центр Р непрерывно изменяет свое положение как на неподвижной плоскости, так и на подвижной плоскости, связанной с движущейся фигурой. Геометрическое место мгновенных центров вращения, т.е. положений точки Р на неподвижной плоскости, называют *неподвижной центроидой*, а геометрическое место мгновенных центров скоростей подвижной фигуры – *подвижной центроидой* (рис. 34). В данный момент времени обе центроиды касаются друг друга в точке Р, являющейся для этого момента мгновенным центром вращения (или скоростей). Пересекаться центроиды не могут. Отсюда можно заключить, что при плоскопараллельном движении происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

<u>*Задача 1*</u>. Колесо радиуса $R = 1$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $V_0 = 5$ м/с. Найти скорость концов M_1, M_2 и M_3 вертикального и горизонтального диаметров колеса, а также угловую скорость ω колеса (рис. 35).

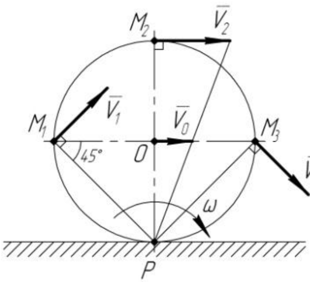


Рис. 35

<u>*Решение*</u>. Точка касания Р является мгновенным центром скорости и $V_P = 0$. Так как $\overline{V}_0 \perp PM_2$, то $V_0 = \omega \cdot OP$. Откуда $\omega = \frac{V_0}{R} = \frac{5}{1} = 5$ рад/с.

Значит $V_1 = \omega \cdot PM_1$, $V_2 = \omega \cdot PM_2$, $V_3 = \omega \cdot PM_3$, где $PM_2 = 2R = 2$ м, $PM_1 = PM_3 = \frac{R}{cos45°} = 1{,}4$ м.

Следовательно, $V_1 = 5 \cdot 1{,}4 = 7$ м/с,

$V_2 = 5 \cdot 2 = 10$ м/с, $V_3 = 5 \cdot 1{,}4 = 7$ м/с.

Скорости точек M_1 и M_3 равны по модулю, но имеют разные направления $\bar{V}_1 \perp PM_1$, $\bar{V}_3 \perp PM_3$.

Задача 2. Найти для заданного положения механизма скорости точек B и C, если длина кривошипа OA=0,2 м, длина шатуна AB=0,6 м, угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = 2$ рад/с (рис. 36) и AC=0,3 м.

Решение. Определяем скорость точки A

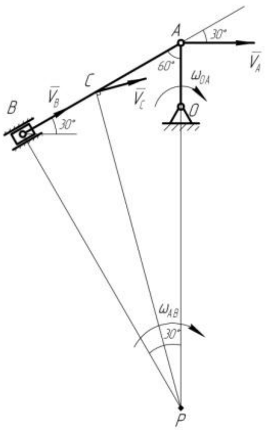


Рис. 36

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \text{ м/с}$$

.

По теореме о проекциях скоростей находим скорость точки B:

$$V_A \cdot cos30° = V_B \cdot cos0°,$$

$$V_B = 0{,}4 \cdot 0{,}866 = 0{,}35 \text{ м/с}.$$

Скорость точки C находим по формуле $V = \omega \cdot h$, т.е. $V_C = \omega_{AB} \cdot CP$, так как точка P является мгновенным центром скоростей.

Скорость точки A так же определяется равенством $V_A = \omega_{AB} \cdot AP$. Откуда $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$.

Гипотенуза AP находится из прямоугольного треугольника ABP:

$$AP = \frac{AB}{cos60°} = \frac{0,6}{0,5} = 1,2 \text{ м.}$$

Тогда угловая скорость звена AB равна

$$\omega_{AB} = \frac{0,4}{1,2} = 0,33 \text{ рад/с.}$$

Расстояние CP можно найти из прямоугольного треугольника CBP. Сначала определим BP:

$$BP = AP \cdot cos30° = 1,2 \cdot 0,866 = 1,04 \text{ м,}$$

$$CP = \sqrt{BC^2 + BP^2} = \sqrt{0,3^2 + 1,04^2} = 1,08 \text{ м.}$$

Теперь определим скорость точки C:

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0,33 \cdot 1,08 = 0,357 \text{ м/с.}$$

§20. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение точки плоской фигуры складывается из ускорений, которые точка получает при поступательном и вращательном движениях этой фигуры. Положение точки M по отношению к осям Oxy (см. рис. 24) определяется радиус-вектором $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$. Тогда

$$\bar{a}_M = \frac{d^2\bar{r}}{d} = \frac{d^2\bar{r}_A}{d} + \frac{d^2\bar{r}'}{d}, \text{ или}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \quad (60)$$

Ускорение $\bar{a}_{MA}$, как ускорение точки вращающегося твердого тела, определяется по формулам:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ и } tg\mu = \varepsilon/\omega^2\text{, т.е.}$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, tg\mu = \varepsilon/\omega^2, \quad (61)$$

где ε и ω – угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ – угол между вектором $\bar{a}_{MA}$ и отрезком МА (рис. 37). Таким образом, *ускорение любой точки м плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки А, принятой за плюс, и ускорения, которое точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса*. Мо дуль и направление ускорения $\bar{a}_M$ находятся построением параллелограмма (рис. 37).

Однако этот способ усложняет расчет, так как надо будет предварительно находить угол μ. Поэтому при решении задач удобнее вектор $\bar{a}_{MA}$ заменять его составляющими касательной $(\bar{a}^{\tau}_{MA})$и нормаль-

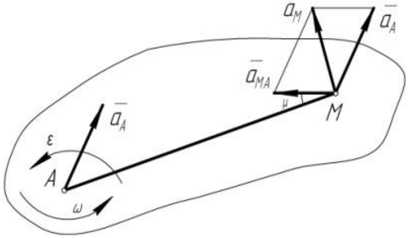


Рис. 37

ной ($\bar{a}_{MA}^{n}$). И тогда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}. \tag{62}$$

При этом вектор $\bar{a}_{MA}^{\tau}$ направлен перпендикулярно АМ в сторону в ращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор $\bar{a}_{MA}^{n}$ всегда направлен от точки М в полюсу А (рис. 38). Численно же

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AM, a_{MA}^{n} = \omega^2 \cdot AM. \tag{63}$$

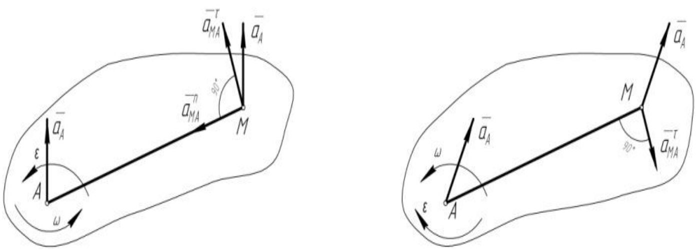


Рис. 38

Если полюс А движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной $\bar{a}_A^{\tau}$ и нормальной $\bar{a}_A^{n}$ составляющих, тогда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}. \tag{64}$$

Наконец, если точка М движется криволинейно и ее траектория известна, то $\bar{a}_M$ можно заменить суммой:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{\tau} + \bar{a}_M^{n}.$$

Задача. По неподвижной шестерне 1 радиуса $r_1 = 0{,}3\text{м}$ обкатывается шестерня 2 радиуса $r_2 = 0{,}2\text{м}$, насаженная на кривошип ОА (рис. 39). Кривошип, вращающийся вокруг оси О, имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega = 1 \text{ рад/с}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4 \text{ рад/с}^2$. Определить в этот момент времени ускорение точки В, лежащей на ободе подвижной шестерни в положении, когда радиус АВ⊥ОА.

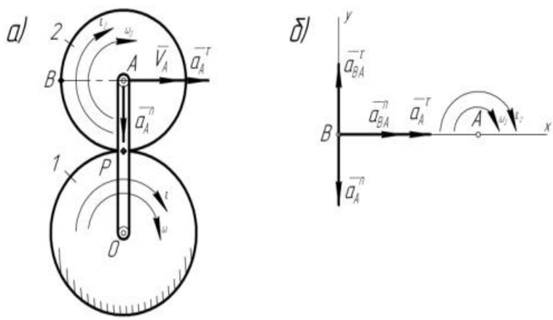


Рис. 39

Решение.

1) По данным задачи находим скорости $\bar{V}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ точки А, которую выбираем за плюс.

2) Определяем $\bar{V}_A$ и $\bar{a}_A$ зная ω и ε кривошипа, находим:

$$V_A = OA \cdot \omega = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ м/с};$$

$$a_A^\tau = OA \cdot \varepsilon = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = OA \cdot \omega^2 = 0{,}5 \cdot 1^2 = 0{,}5 \text{м/с}^2.$$

Так как знаки V_A и a_A^τ одинаковые, то движение точки из данного положения является ускоренным.

Векторы $\bar{a}_A^\tau$ и $\bar{a}_A^n$ имеют направления, показанные на рисунке 39, а.

3) Определяем ω_2. Так как точка Р мгновенный центр скоростей, то

$V_A = \omega_2 \cdot AP$, откуда $\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5 \text{ рад/с}.$

Направление ω_2 (направление вращения шестерни) определяется направлением $\bar{V}_A$ и показано дуговой стрелкой на рисунке 39.

4) Определяем ε_2. По формуле $a^\tau = \varepsilon \cdot R$ имеем:

$$a_A^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2 \;\Rightarrow\; \varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки ε_2 и ω_2 одинаковы; значит вращение шестерни 2 ускоренное.

5)Определяем a_{BA}^τ и a_{BA}^n. Ускорение точки В найдем по формуле (64).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \qquad (*)$$

Так как $BA = r_2$, то

$$a_{BA}^\tau = BA \cdot \omega_2^2 = 0{,}2 \cdot 2{,}5^2 = 1{,}25 \text{ м/с}^2.$$

6) Вычисляем a_B. Проводим оси B_xи B_y, и составляем проекции уравнения (*) на эти оси.

$$a_{Bx} = a_A^\tau + a_{BA}^n = 2 + 1{,}25 = 3{,}25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = a_{BA}^\tau + a_A^n = 2 - 0{,}5 = 1{,}5 \text{ м/с}^2.$$

И окончательно:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{3{,}25^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}6 \text{ м/с}^2.$$

§21. Мгновенный центр ускорений

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений.* Положение этой точки определяется, если известны ускорения $\bar{a}_A$ какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ε, следующим путем:

1) Находим значение угла μ из формулы $tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

2) От точки A проводим прямую AE (рис. 40); при этом прямая AE должна быть отклонена от $\bar{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против, если оно является замедленным, т.е. в сторону направления углового ускорения ε;

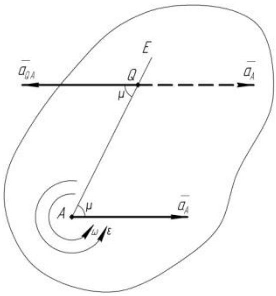


Рис. 40

3) Откладываем вдоль линии AE отрезок AQ, равный:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (65)$$

Построенная таким способом точка Q и будет мгновенным центром ускорений.

Если точку Q выбрать за полюс (то $a_Q = 0$) и ускорение любой точки M тела, согласно формуле $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$ будет:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ}.$$

Тогда численно

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно, *ускорения точек плоской фигуры* определяется в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q, и должно выполняться

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_M}{AQ} = \cdots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

т.е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.

Надо иметь в виду, что положение мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают.

Глава IV
ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§22. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Рассмотрим движение твердого тела по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, у которого одна его точка O остается во все время движения неподвижной. Такое движение совершает любое тело, закрепленное в точке O шаровым шарниром (например, волчок).

1) **Уравнения движения**. Найдем параметры, которые определяют положение тела, имеющего неподвижную точку. Для этого соединим жестко с телом трехгранник $Oxyz$, по положению которого можно судить о положении тела (рис. 41).

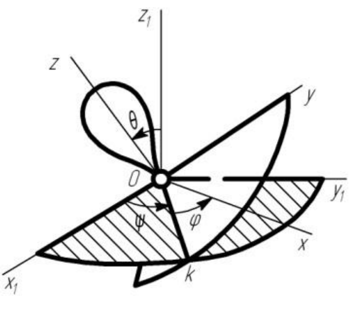


Рис. 41

Линия OK, вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1 называется *линией узлов.* Тогда положение тела (и системы $Oxyz$), по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$, можно определить углами:

$$\varphi = \angle KOx, \psi = \angle x_1OK, \theta = \angle z_1Oz.$$

Это *углы Эйлера*, название которых взяты из небесной механики:

φ – *угол собственного вращения;*

ψ – *угол прецессии;*

θ – *угол нутации.*

Положительные направления отсчета углов показаны на рисунке 41 стрелками.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т.е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t), \psi = f_2(t), \theta = f_3(t). \qquad (66)$$

Эти уравнения определяют закон движения и называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.*

2) *Угловая скорость тела*. Если меняется угол φ, то тело вращается вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла ψ – вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия), с угловой скорость $\omega_2 = \dot{\psi}$ и при изменении угла θ – вращение вокруг линии OK (нутация) с угловой

скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$. Векторы $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ этих угловых скоростей направлены соответственно по осям Oz, Oz_1, OK (рис. 42).

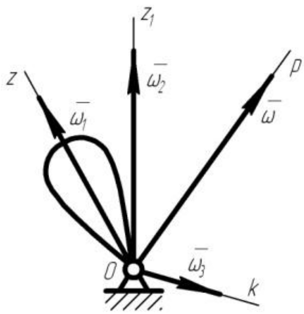


Рис. 42

И в общем случае $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$.

Вектор $\bar{\omega}$ будет меняться и численно и по направлению. Поэтому вектор $\bar{\omega}$ называют *мгновенной угловой скоростью тела*, а ось OP, вдоль которой направлен вектор $\bar{\omega}$, называют *мгновенной осью вращения* и ее направление в пространстве и самом теле непрерывно меняется. Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку (рис. 43).

3) Угловое ускорение тела. Векторная величина

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \tag{67}$$

Характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется *угловым ускорением тела или мгновенным угловым ускорением.* Если вектор $\bar{\omega}$ меняется, то его конец А будет описывать в про-

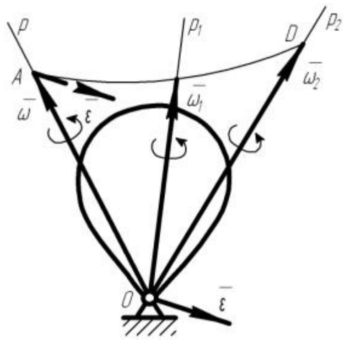


Рис. 43

странстве некоторую кривую АД, являющуюся годографом вектора $\bar{\omega}$ (см. рис. 43). Сравнивая выражение (67) с равенством $\bar{V} = d\bar{r}/dt$, приходим к выводу, что угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ можно вычислять как скорость, с которой конец вектора $\bar{\omega}$ перемещается вдоль кривой АД. В частности, направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением касательной к кривой АД в соответствующей точке. Здесь видно, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора $\bar{\varepsilon}$ не совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются основными кинематическими характеристиками движения тела, имеющего неподвижную точку. Аналитически они находятся из уравнений (66). Так как

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \qquad (68)$$

где численно

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \omega_2 = \dot{\psi}, \omega_3 = \dot{\theta}. \qquad (69)$$

Проектируя обе части уравнения (68) на оси x, y, z, получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}, \\ \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}, \\ \omega_z &= \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}. \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

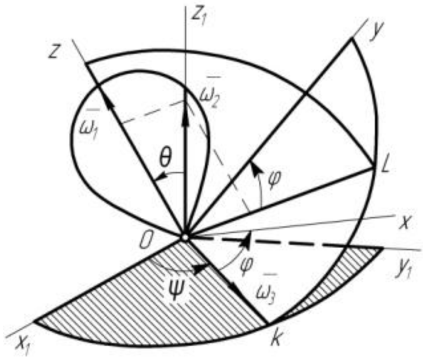


Рис. 44

Проекции векторов ω_1 и ω_3 находятся сразу (рис. 44):

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0, \omega_{1z} = \dot{\varphi};$$

$$\omega_{3x} = \dot{\theta} cos\varphi,$$

$$\omega_{3y} = -\dot{\theta} sin\varphi, \omega_{3z} = 0.$$

Для определения проекции вектора $\bar{\omega}_2$ проведем через оси Oz и Oz_1 плоскость, которая пересечется с плоскостью Oxy вдоль линии OL. Линия OK перпендикулярна плоскости zOz_1, а значит и перпендикулярна линии OL ($\angle KOL = 90°$, а $\angle LOy = \varphi$). Тогда, проектируя вектор $\bar{\omega}_2$ на линию OL, а эту проекцию в свою очередь на оси Ox и Oy, получим:

$$\omega_{2x} = \dot{\psi} \cdot sin\theta \cdot sin\varphi,$$

$$\omega_{2y} = \dot{\psi} \cdot sin\theta \cdot cos\varphi,$$

$$\omega_{2x} = \dot{\psi} \cdot cos\theta.$$

Окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cdot sin\theta \cdot sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cdot sin\theta \cdot cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Это есть *кинематические уравнения Эйлера*. Они определяют проекции вектора угловой скорости тела $\bar{\omega}$ на подвижные оси $Oxyz$ через углы Эйлера; тем самым определяется и вектор $\bar{\omega}$.

Аналогично определяются проекции вектора $\bar{\omega}$ на неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi} \cdot sin\theta \cdot sin\psi + \dot{\theta} cos\psi, \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi} \cdot sin\theta \cdot cos\psi + \dot{\theta} sin\psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cdot cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Равенство (72) дает возможность определить $\bar{\varepsilon}$:

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_x, \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}, \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1}. \qquad (73)$$

По этим проекциям можно определить вектор $\bar{\varepsilon}$.

§23. Скорости и ускорения точек тела

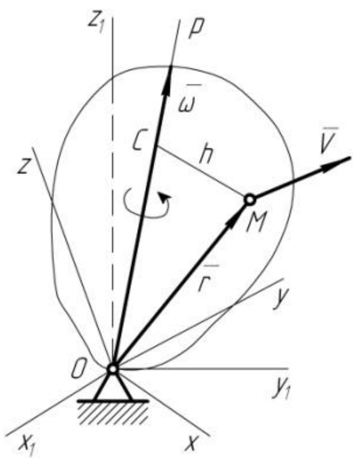


Рис. 45

Если тело движется вокруг неподвижной точки O, то оно имеет мгновенную ось вращения OP, вокруг которой происходит элементарный поворот с угловой скоростью ω (рис. 45). И тогда

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (74)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор.

Направлен вектор $\bar{V}$ перпендикулярно плоскости MOP в сторону поворота тела.

Численно же

$$V = \omega h,$$

где $h = MC$ – расстояние точки M от мгновенной оси.

Геометрически скорость точки M тела в данный момент времени можно найти, зная в этот момент скорость $\bar{V}_A$ какой-нибудь точки A тела и направление скорости $\bar{V}_B$ другой точки B. Проведя через точку A плоскость 1, перпендикулярную $\bar{V}_A$ (рис. 46) (мгновенная ось OP лежит в этой плоскости), и плоскость 2, проведенную через точку B, перпендикулярную $\bar{V}_B$, и определив расстояние h от оси OP до точки A, можно найти угловую скорость ω в данный момент времени:

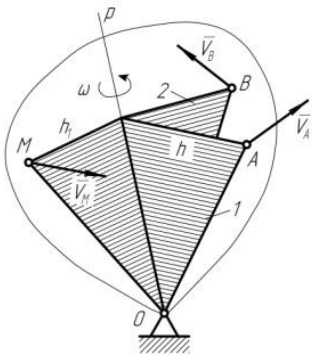


Рис. 46

$$\omega = \frac{V_A}{h}.$$

Тогда скорость любой точки M тела будет $V_M = \omega h_1$, а вектор $\bar{V}_M$ будет направлен перпендикулярно плоскости OMP.

Аналитически скорость $\bar{V}$ определяется по ее проекциям на какие-нибудь координатные оси.

Проекциями вектора $\bar{V}$ на оси $Oxyz$, жестко связанные с телом, будут Vx, Vy, Vz.

Согласно формуле векторной алгебры

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где $\bar{V} = Vx \cdot \bar{\imath} + Vy \cdot \bar{\jmath} + Vz \cdot \bar{k}$. Разлагая определитель по элементам первой строки, получим:

$$\left.\begin{aligned} Vx &= \omega_y z - \omega_z y, \\ Vy &= \omega_z x - \omega_x z, \\ Vz &= \omega_x y - \omega_y z. \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Эти формулы, как и формулы (71) называют *формулами Эйлера.*

Если ось z неподвижна, то

$$Vx = -\omega y, Vy = \omega x, Vz = 0. \qquad (75')$$

Определим теперь ускорение точки M. Так как

$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \left(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}\right)$, где $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{r}} = \bar{V}$, то

$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{V}). \qquad (76)$$

Ускорение $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ называют *вращательным*, а ускорение $\bar{a}_2 = \overline{\omega} \times \bar{V}$ – *осестремительным*.

Вектор $\bar{a}_1$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор $\bar{\varepsilon}$ (рис. 47). По модулю $a_1 = \varepsilon \cdot r \cdot sin\beta = \varepsilon h_1$, где h_1 – расстояние от точки M до вектора $\bar{\varepsilon}$. Вектор $\bar{a}_2$ одновременно перпендикулярен $\bar{V}$ и $\overline{\omega}$ и будет направлен вдоль MC. По модулю $a_2 = \omega \cdot V \cdot sin90° = \omega^2 h$, так как $V = \omega h$.

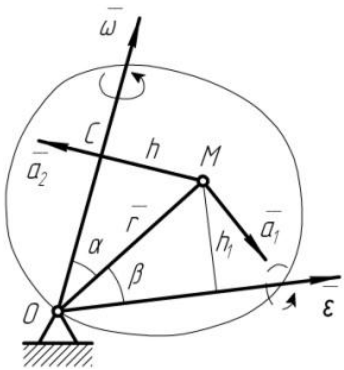


Рис. 47

Надо заметить, что вектор $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ не будет вообще вектором касательного ускорения точки M (по касательной направлен вектор $\bar{V} = \overline{\omega} \times \bar{r}$, а направление вектора $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ будет вообще другим); следовательно, и вектор $\overline{\omega} \times \bar{V}$ не будет вектором нормального ускорения точки M.

§24. Общий случай движения свободного твердого тела

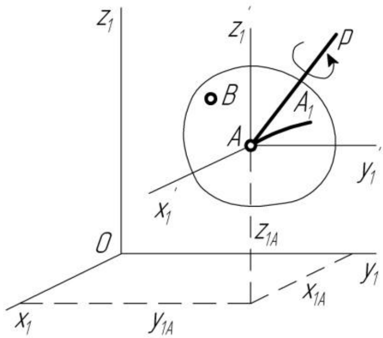


Рис. 48

Пусть свободное тело как угодно перемещается по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис. 48). Найдем закон такого движения. Возьмем в качестве полюса точку A и проведем через нее оси $Ax_1'y_1'z_1'$, которые вместе с полюсом будут перемещаться поступательно. Тогда положение тела в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если будем знать координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} и углы Эйлера φ, ψ и θ, определяемые по отношению к системе отсчета $Ax_1'y_1'z_1'$. Следовательно, уравнениями движения тела по отношению к системе отсчета $Ox_1'y_1'z_1'$ в любой момент времени будут:

$$\left.\begin{array}{lll} x_{1A} = f_1(t), & y_{1A} = f_2(t), & z_{1A} = f_3(t), \\ \varphi = f_4(t), & \psi = f_5(t), & \theta = f_6(t). \end{array}\right\} \qquad (77)$$

Рассмотрим геометрическую картину свободного движения твердого тела.

Очевидно, что первые три уравнения определяют только то движение, которое тело совершало бы при постоянных углах φ, ψ, θ, т.е. при поступательном движении тела вместе с полюсом A. Последние же три уравнения определяют движение, которое происходило бы при постоянных значениях координат x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, т.е. когда точка A неподвижна. Но ранее было установлено, что движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения. Отсюда заключаем, что в общем случае движения свободного твердого тела можно рассматривать как слагающее из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью $\bar{V}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс A (рис. 49). Такое движение совершает брошенный камень, самолет, проделывающий фигуры высшего пилотажа, артиллерийский снаряд и т.д.

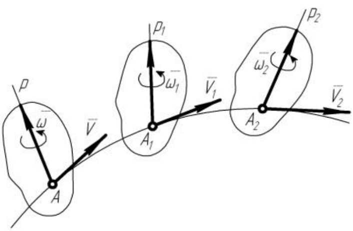


Рис. 49

Основными кинематическими характеристиками являются: скорость $\bar{V}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ полюса поступательного движения; угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по уравнениям (77).

В частности плоскопараллельное движение может быть сложным; при этом векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ будут все время перпендикулярны плоскости, параллельно которой движется тело.

Скорость $\bar{V}_M$ любой точки M, как и при плоском движении определяется

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA} \text{ или } \bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}, \qquad (78)$$

где: $\bar{V}_A$ – скорость полюса;

$$\overline{AM} = \bar{r}.$$

Аналогично для ускорения

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \qquad (79)$$

Глава V
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§25. Относительное, переносное и абсолютное движения

В механике иногда необходимо рассматривать движение тела (или точки) по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижная. Движение точки в этом случае *называется сложным или составным.*

Например, шар, катящийся по полу движущегося вагона, можно считать сложным. Сложное движение шара состоит из двух более простых и более легко исследуемых. Одно из этих движений – это движение шара относительно вагона, другое – движение вагона, относительно земли. Разложение сложного движения точки на более простые широко используется при кинематических и динамических расчетах.

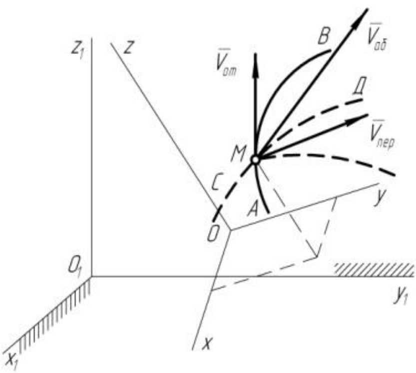


Рис. 50

Рассмотрим движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь движется относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 50).

1. Движение, совершае-

мое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$), называется *относительным движением.* Траекторией относительного движения является кривая AB. Скорость точки M по отношению к осям $Oxyz$ называется *относительной скоростью* (обозначается $\bar{V}_{от}$), а ускорение - *относительным ускорением* (обозначается $\bar{a}_{от}$).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$, по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$ является для точки M *переносным движением*.

Скорость точки m, связанной с подвижными осями $Oxyz$, с которой с которой в данный момент совпадает движущая точка M, называется *переносной скоростью* точки M (обозначается $\bar{V}_{пер}$), а ускорение этой точки m – *переносным ускорением* (обозначается $\bar{a}_{пер}$).

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется *абсолютным* или *сложным*. Траектория СД этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость – *абсолютной скоростью* (обозначается

$\bar{V}_{аб}$) и ускорение – *абсолютным ускорением* (обозначается $\bar{a}_{аб}$). В приведенном выше примере движения шара относительно вагона будет относительным; движение вагона по отношению к земле для шара будет переносным; наконец, движение шара по отношению к земле будет его абсолютным движением.

§26. Теорема о сложении скоростей

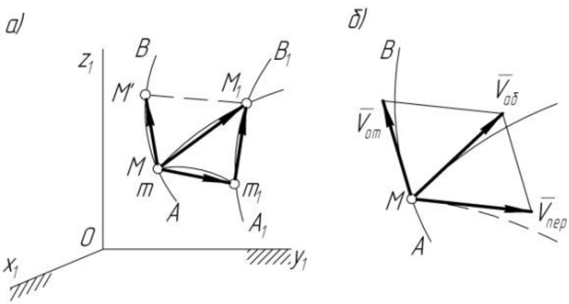


Рис. 51

При сложном движении точки M вдоль траектории AB за время $\Delta t = t_1 - t$ ее относительное перемещение определяется вектором $\overline{MM'}$ (рис. 51, а).

Сама кривая перейдет в положение A_1B_1, а точка m совершит переносное перемещение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результате точка M придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$. И тогда из векторного треугольника имеем

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

Деля обе части на Δt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right),$$

где по определению,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \bar{V}_{\text{аб}},\ \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) = \bar{V}_{\text{пер}},$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \bar{V}_{\text{от}}.$$

В результате находим, что

$$\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_{\text{пер}} + \bar{V}_{\text{от}}. \tag{80}$$

Направлены векторы $\bar{V}_{\text{аб}}$, $\bar{V}_{\text{пер}}$, $\bar{V}_{\text{от}}$ по касательным к соответствующим траекториям (рисунок 51, б).

Таким образом, доказана теорема: *при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

Если угол между векторами $\bar{V}_{\text{от}}$ и $\bar{V}_{\text{пер}}$ равен α, то по модулю

$$V_{\text{аб}} = \sqrt{V_{\text{от}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2V_{\text{от}}V_{\text{пер}}cos\alpha}. \tag{81}$$

Пример. Точка M движется вдоль прямой OA со скоростью $V = 20$ см/с (рис. 52), а сама прямая вращается в плоскости Oxy вокруг центра O с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Определить скорость точки M в положении $OM = 80$ см.

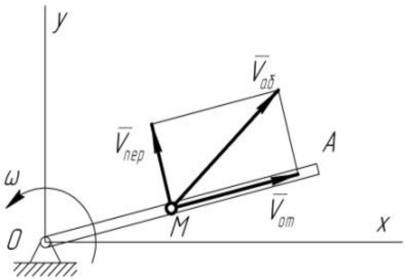


Рис. 52

Решение. Точка M совершает сложное движение, состоящее из относительного движения вдоль прямой OA и переносного движения вместе с этой прямой.

Тогда скорость $V = V_{от}$, а переносная скорость $\bar{V}_{пер} \perp OA$ и направлена в сторону вращения. Численно переносная скорость равна

$$V_{пер} = \omega \cdot OM = 2 \cdot 80 = 160 \text{ см/с}.$$

Так как $\bar{V}_{от} \perp \bar{V}_{пер}$, то по модулю

$$V_{аб} = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2} = \sqrt{20^2 + 160^2} = 161{,}2 \text{ см/с}.$$

§27. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Найдем зависимость относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки.

Из равенства (80) следует

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{d\bar{V}_{\text{аб}}}{dt} = \frac{d\bar{V}_{\text{от}}}{dt} + \frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt}, \tag{82}$$

или

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_1}{dt} + \frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_1}{dt} + \frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_2}{dt}, \tag{83}$$

где *относительное движение* отмечено индексом 1, а *переносное движение* – индексом 2.

По определению *относительное ускорение* есть

$$\bar{a}_{\text{от}} = \frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_1}{dt},$$

переносное ускорение есть

$$\bar{a}_{\text{пер}} = \frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_2}{dt}.$$

В результате получаем

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_1}{dt}. \tag{84}$$

Введем обозначение

$$\bar{a}_{\text{кор}} = \frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_1}{dt}.$$

Величина $\bar{a}_{\text{кор}}$, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении, называется поворотным, или кориолисовым, ускорением точки. В результате равенство (84) примет вид

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \tag{85}$$

Формула (85) есть теорема Кориолиса о сложении ускорений: *при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.*

Найдем формулу $\bar{a}_{\text{кор}}$, вытекающую из равенства (85). Рассмотрим общий случай, когда переносное движение, т.е. движение подвижных осей $Oxyz$, а с ними и кривой AB, слагающимся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью ω, называемой *переносной угловой скоростью.* Величина $\bar{\omega}$ от выбора полюса не зависит (рис. 53).

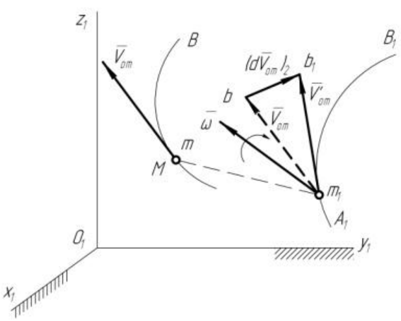


Рис. 53

Тогда $(d\bar{V}_{\text{от}})_2 = \overline{bb_1} = \bar{V}_b dt$, где $\bar{V}_b$ – скорость точки b, с которой перемещается точка b, при повороте вектора $\overline{m_1 b} = \bar{V}_{\text{от}}$ вокруг точки m_1. Этот поворот происходит с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то по формуле

$$\bar{V}_b = \bar{\omega} \times \overline{m_1 b} = \bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}.$$

В результате получаем $(d\bar{V}_{\text{от}})_2 = \bar{V}_b dt = \bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}} dt$ и

$$\frac{(d\bar{V}_{\text{от}})_2}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}, \tag{86}$$

$$\frac{(d\bar{V}_{\text{пер}})_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}. \tag{87}$$

Таким образом

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}). \tag{88}$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

В случае поступательного переносного движения, т.е., когда $\omega = 0$ и, следовательно, $a_{\text{кор}} = 0$.

Тогда равенство (85) дает

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}}, \qquad (89)$$

т.е. *при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.*

Вычисление *относительного ускорения* осуществляется обычными методами кинематики точки. *Переносное ускорение* вычисляется по формулам, полученным для ускорений твердого тела.

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}).$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_{\text{от}}$ обозначить через α (рисунок 54), будет равен

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |V_{\text{от}}| sin\alpha. \qquad (90)$$

Направлен вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ так же, как и вектор $\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{от}}$, т.е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_{\text{от}}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\bar{\omega}$ с $\bar{V}_{\text{от}}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 54, а). Из этого рисунка видно, что направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ можно определить, спроектировав вектор $\bar{V}_{\text{от}}$ на плоскость П, перпендикулярную $\bar{\omega}$,

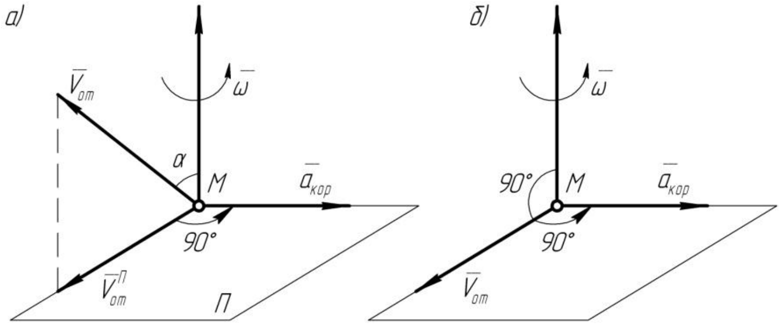


Рис. 54

и повернув эту проекцию $\overline{V}^{\text{П}}_{\text{от}}$ на $90°$ в сторону переносного вращения.

Если относительная траектория – плоская кривая и перемещается все время в одной плоскости, то угол $\alpha = 90°$ (рис. 54, б) и в этом случае по модулю

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |V_{\text{от}}|.$$

Из формулы (90) видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) Когда $\omega = 0$, т.е. когда переносное движение является поступательным или если переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) Когда $V_{\text{от}} = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) Когда $\alpha = 0$, или $\alpha = 180°$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $\bar{V}_{от}$ параллелен этой оси.

<u>Пример</u>. Кулиса OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с вокруг оси O (рис. 55). По прорези кулисы скользит ползун B с постоянной относительной скоростью $V_{от} = 5$ м/с. Определить абсолютное ускорение ползуна в положении при $OB = 0{,}4$ м.

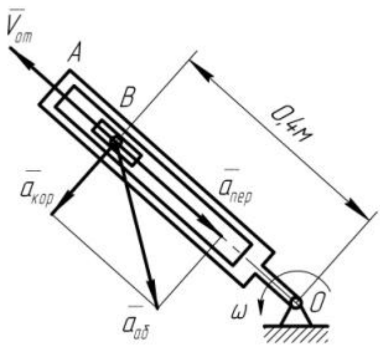


Рис. 55

<u>Решение</u>. По условиям задачи относительное движение ползуна по прорези кулисы является равномерным и прямолинейным; следовательно, $a_{от} = 0$.

Движение кулисы OA для ползуна B будет переносным. Следовательно, переносное ускорение для ползуна равно ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент времени совпадает ползун. Эта точка кулисы движется по окружности радиуса OB и тогда $\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}^n_{\text{пер}}$ и по модулю

$$\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}^n_{\text{пер}} = \omega^2 OB = 4^2 \cdot 0{,}4 = 6{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение $a_{\text{кор}} = 2\omega V_{\text{от}}$, так как движение плоское. Повернув вектор относительной скорости на $90°$ вокруг точки B в сторону переносного вращения, находим направление $\bar{a}_{\text{кор}}$.

Численно $a_{\text{кор}} = 2\omega V_{\text{от}} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40 \text{ м/с}^2$.

По теореме Кориолиса

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}.$$

В нашем случае $\bar{a}_{\text{от}} = 0$, а $\bar{a}_{\text{кор}}$ перпендикулярно $\bar{a}_{\text{пер}}$. Следовательно,

$$a_{\text{аб}} = \sqrt{a^2_{\text{от}} + a^2_{\text{пер}}} = \sqrt{6{,}4^2 + 40^2} = 40{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Глава VI

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§28. Сложение поступательных движений

Если тело движется относительно подвижных осей $Oxyz$ (см. рис. 50), а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее движение тела называется *сложным*.

Задачей кинематики в этом случае нахождение зависимостей характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела будут его поступательные и угловые скорости и ускорения.

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью $\bar{V}_1$, а переносное движение – тоже поступательное со скоростью $\bar{V}_2$. Тогда все точки тела будут иметь такие же скорости. И тогда по теореме о сложении скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость $\bar{V}_{об} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$, т.е. абсолютное движение тела будет тоже поступательным.

Итак, при сложении двух поступательных движений со скоростями $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ результирующее движение тела так же будет поступательным со скоростью $\underline{\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2}$.

Задача сложения скоростей в этом случае сводится к задаче кинематики точки.

§29. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью, $\overline{\omega}_1$ вокруг оси aa', укрепленной на кривошипе ba (рис. 56, а), а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси bb', параллельной aa', с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$.

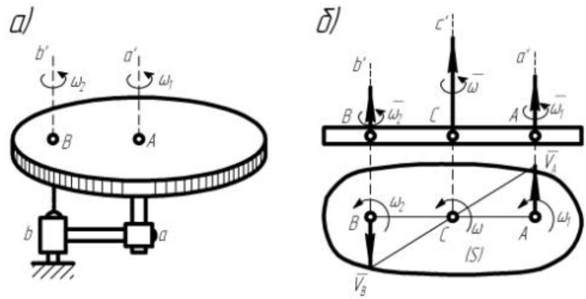


Рис. 56

Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям. Рассмотрим три возможных случая.

1) Вращения направлены в одну сторону.

Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рисунок 56, б). Очевидно, что

$$V_A = \omega_2 \cdot AB, V_B = \omega_1 \cdot AB.$$

При этом векторы $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ параллельны друг другу (оба перпендикулярны AB) и направлены в разные стороны. Тогда точка C является мгновенным центром скоростей ($V_C = 0$) и, следовательно, ось Cc' будет параллельна осям Aa' и Bb', является *мгновенной осью вращения тела.*

Для определения угловой скорости $\bar{\omega}$ абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' воспользуемся равенствами

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC}, \text{ откуда } \omega = \frac{V_B + V_A}{AB}.$$

Этот результат получается из свойств пропорции.

Подставив значения $V_A = \omega_2 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$ в последнее равенство, получим

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad (91)$$

$$\frac{\omega}{BC} = \frac{\omega_1}{AC} + \frac{\omega_2}{AB}. \qquad (92)$$

Итак, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным.

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

2) Вращения направлены в разные стороны.

Пусть $\omega_1 > \omega_2$ (рис. 57). Скорости точек A и B равны:

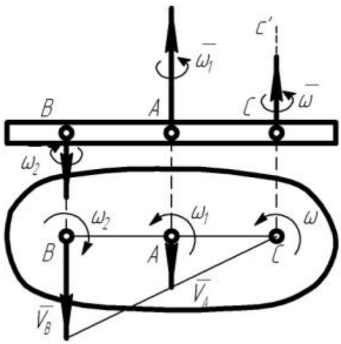


Рис. 57

$$V_A = \omega_2 \cdot AB, \qquad V_B = \omega_1 \cdot AB.$$

При этом скорости $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ параллельны и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось вращения проходит через точку C (рис. 57) и

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} \text{ и}$$

$$\omega = \frac{V_B - V_A}{AB}.$$

Подставляя в эти равенства значения V_A и V_B, найдем

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{93}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{94}$$

Итак, результирующее движение в этом случае является мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг оси Cc'.

3) Пара вращений.

Рассмотрим случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны (рис. 58), но по модулю $\omega_1 = \omega_2$.

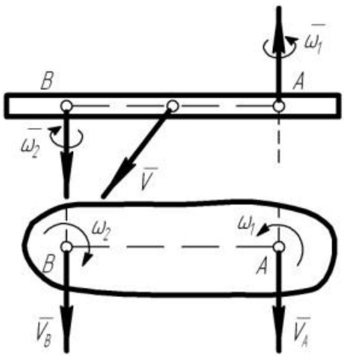


Рис. 58

Такая совокупность вращений называется *парой вращений*, а векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ образуют *пару угловых скоростей.*

В этом случае $V_A = \omega_2 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$, т.е. $V_A = V_B$.

В этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости $V = \omega_1 \cdot AB$. Т.е. результирующее движение тела будет поступательным (или мгновенно поступательным) движением со скоростью численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$; направление вектора $\bar{V}$ определяется так же как и направление момента $\bar{m}$ пары сил.

Примером такого движения является поступательное движение велосипедной педали относительно рамы велосипеда.

§30. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг оси a_1a, укрепленной на кривошипе 2 (рис. 59, а), а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг оси b_1b, которая с осью a_1a пересекается в точке O.

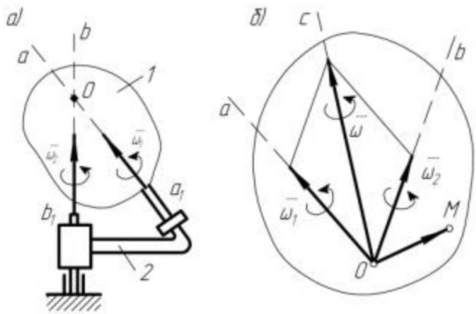


Рис. 59

Очевидно, что в этом случае скорость точки O, как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю и результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки O. Значит тело в данный момент времени имеет угловую скорость $\bar{\omega}$, направленную по мгновенной оси вращения, проходящей через точку O.

Для определения значения $\bar{\omega}$, найдем скорость точки M, радиус-вектор которой $\bar{r} = \overline{OM}$. В относительном движении (вращение вокруг оси Oa) точка M имеет скорость $\bar{V}_{\text{от}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}$; в переносном движении (вращение вокруг оси

Ob) точка получит скорость $\bar{V}_{\text{пер}} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}$. Тогда абсолютная скорость точки M

$$\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_{\text{от}} + \bar{V}_{\text{пер}} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}.$$

С другой стороны результирующее движение тела является мгновенным вращением с некоторой угловой скоростью $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Полученные равенства выполняются при любом $\bar{r}$, а это возможно тогда, когда

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \qquad (95)$$

Следовательно, при сложении вращений вокруг двух пересекающихся осей, результирующим движением тела будет мгновенное вращение вокруг оси Oc и угловая скорость этого вращения будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей. С течением времени ось Oc меняет свое положение.

Если тело участвует в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке O, то результирующим движением будет вращение вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \sum \bar{\omega}_{\text{к}}. \qquad (96)$$

§31. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение

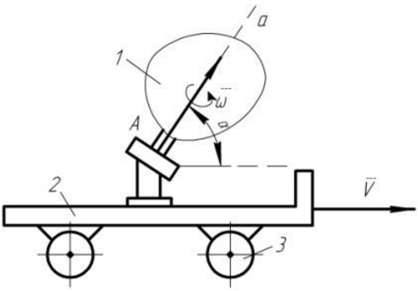


Рис. 60

Рассмотрим сложное движение тела, которое слагается из поступательного и вращательного движений (рис. 60). Здесь относительным движением тела 1 является вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Aa, а переносным – поступательное движение платформы. Колесо 3 тоже участвует в этих движениях. В зависимости от угла α между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{V}$ (для колеса этот угол равен $90°$) здесь возможны три случая.

1) Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения ($\bar{V} \perp \bar{\omega}$).

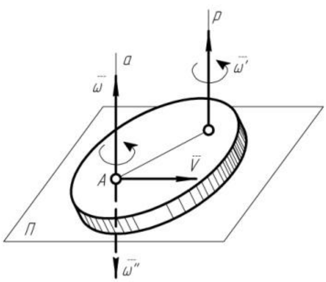


Рис. 61

Пусть сложное движение тела слагается из вращательного движения вокруг оси Aa с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\bar{V}$, перпендикулярной $\bar{\omega}$ (рис. 61). Очевидно, что это плоскопараллельное движение. Если точку A взять за полюс, то наше движение слагается из поступательного со скоростью $\bar{V}_A = \bar{V}$ и из вращательного вокруг оси Aa, проходящей через этот полюс.

Вектор $\bar{V}$ можно заменить парой угловых скоростей $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$. Беря $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, а $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. Тогда

$$AP = \frac{V}{\omega}. \tag{97}$$

Векторы $\bar{\omega}''$ и $\bar{\omega}$ дают при сложении нуль, и мы получаем, что движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси Pp с угловой скоростью $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$. Здесь видно, что точка P является мгновенным центром скоростей ($V_P = 0$) и вращательная часть движения не зависит от выбора полюса.

2) Винтовое движение ($\bar{V} \parallel \bar{\omega}$).

Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и поступательного со скоростью $\bar{V}$, направленной параллельно оси Aa (рис. 62), то такое движение тела называется *винтовым*. Ось Aa называют *осью винта*.

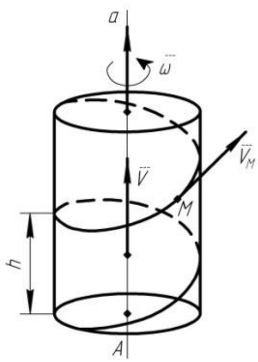


Рис. 62

Когда векторы $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\bar{\omega}$ винт будет *правым*, если в разные стороны – *левым*.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называют шагом h винта. Если величины $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$ постоянны, то шаг винта так же будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T, получим

$$V \cdot T = h \text{ и } \omega \cdot T = 2\pi, \text{ откуда } h = \frac{2\pi V}{\omega}.$$

При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки M, находящейся на расстоянии r от оси винта, слагается из поступательной скорости $\bar{V}$ и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном, которая численно равна $\omega \cdot r$. Следовательно,

$$V_M = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\bar{V}_M$ по касательной к винтовой линии.

3) Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения.

Сложное движение, совершаемое телом в этом случае (рис. 63, а) представляет собой общий случай движения свободного твердого тела.

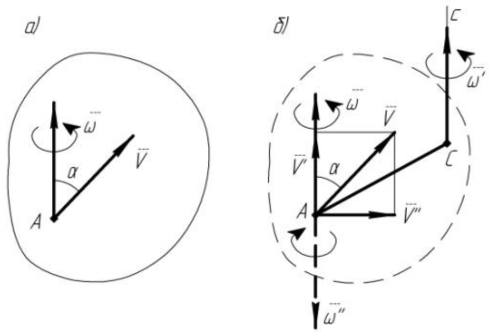


Рис. 63

Разложим вектор $\bar{V}$ (рис. 63, б) на составляющие: $\bar{V}'$, направленный вдоль $\bar{\omega}$ $(V' = V\cos\alpha)$, и $\bar{V}''$ перпендикулярную $\bar{\omega}$ $(V'' = V\sin\alpha)$.

Скорость $\bar{V}''$ можно заменить парой угловых скоростей $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. Тогда

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{V\sin\alpha}{\omega}.$$

Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\bar{V}'$. Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как и при винтовом движении вокруг оси Cc с угловой скоростью $\omega' = \omega$ и поступательной скоростью $V' = V cos\alpha$.

Так как при движении свободного твердого тела величины $\bar{V}$, $\bar{\omega}$, α будут меняться, то будет непрерывно меняться и положение оси Cc, которую поэтому называют *мгновенной винтовой осью.* Таким образом, движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающее из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей.

Глава VII

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют кинематикой?
2. Что такое закон движения тела?
3. Что называют траекторией точки?
4. Какое движение точки называют прямолинейным, а какое – криволинейным?
5. Какие существуют способы задания движения точки?
6. Что называют вектором скорости?
7. Куда направлен вектор скорости точки?
8. Что называется ускорением точки в данный момент времени?
9. Чему равен вектор ускорения точки?
10. Как определяются скорость и ускорение точки при координатном способе задания?
11. Как определяются скорость и ускорение точки при естественном способе задания?
12. Чему равно касательное ускорение точки?
13. Чему равно и куда направлено касательное ускорение точки?
14. Каково уравнение движения при гармоническом колебании?
15. Дать понятие амплитуды и частоты при гармоническом колебании точки?

16. Что называется поступательным движением твердого тела?

17. Какой теоремой определяются свойства поступательного движения твердого тела?

18. Что называется вращательным движением твердого тела?

19. Какие основные кинематические характеристики вращательного движения тела?

20. Каким уравнением выражается закон вращательного движения твердого тела?

21. Как определяется численное значение угловой скорости тела?

22. Как определяется численное значение углового ускорения тела?

23. Какое движение твердого тела называется ускоренным (замедленным)?

24. Как определяются скорости и ускорения точек вращающегося тела?

25. Куда направлены векторы скоростей и ускорений вращающегося тела?

26. Что называется плоскопараллельным движением твердого тела?

27. Назвать уравнение движения плоской фигуры?

28. На какие простые виды движения можно разложить плоское движение?

29. Как геометрически определяется скорость точек плоской фигуры?

30. Как читается теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры?

31. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры?

32. Как определяется положение мгновенного центра скоростей?

33. Как определяются скорости точек плоской фигуры относительно МЦС?

34. Чему равна угловая скорость плоской фигуры?

35. Какую точку при плоском движении тела выбирают за полюс?

36. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?

37. Что такое мгновенный центр ускорений?

38. Что называется сложным движением точки?

39. Что называется относительным движением точки?

40. Что называется переносным движением точки?

41. Как читается теорема о сложении скоростей при сложном движении точки?

42. Как читается теорема Кориолиса?

43. Чему равно кориолисово ускорение?

44. Как определяется направление кориолисова ускорения?

45. Какое движение называется винтовым?

Глава VIII

ТЕСТОВЕ ЗАДАНИЯ ПО КИНЕМАТИКЕ

Тема №1

1. Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка, относительно данной системы отсчёта называется:

А путь;

Б траектория;

В перемещение;

Г расстояние.

2. Кинематика – это раздел механики, в котором изучается:

А движение материальных тел с учётом их массы и действующих на них сил.

Б равновесие материальных тел под действием сил.

В движение материальных тел с учётом их массы.

Г движение материальных тел без учёта их массы и действующих на них сил.

3. Какого способа задания движения не существует?

А векторного;

Б скалярного;

В естественного;

Г координатного.

4. Используя информацию, приведенную на рисунке определить проекцию скорости.

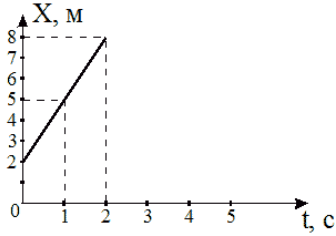
A) 2 м/с

B) 6 м/с

C) 4 м/с

D) 3 м/с

E) 5 м/с



5. Последнюю четверть своего пути равномерно движущееся тело прошло за 2,5с. За какое время был пройден весь путь?

A) 7,5 с

B) 10 с

C) 5 с

D) 0,625 с

E) 12,5 с

6. Векторная величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки называется:

А угловое ускорение;

Б ускорение;

В угловая скорость;

Г скорость.

7. Точка движется по траектории согласно уравнению $S=0.5t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет *10 м/с*.

А 4,5;

Б 5;

В 6;

Г 10;

Д 90.

8. Движение некоторой точки описывается уравнением: $x = 6 - t + t^2$ (м). Какое из нижеприведенных выражений соответствует зависимости проекции скорости этого тела от времени?

А $V_x = -1 + 2t$; м/с;

Б $V_x = 1 + t$; м/с;

В $V_x = -1 + t$; м/с;

Г $V_x = 6 - t$; м/с;

Д $V_x = 1 - 2t$; м/с.

Тема №2

9. Скорость автомобиля равномерно увеличивается в течение 12 с от нуля до 60 км/ч. Тогда ускорение автомобиля будет равно … .

А 0,2;

Б 1,39;

В 5;

Г 10;

Д 90.

10. Дано уравнение движения точки по траектории $S = 5t$. Определить радиус кривизны траектории, когда нормальное ускорение точки $a_n = 3$ м/с^2.

А 1,66;

Б 3;

В 5;

Г 8,33;

Д 15.

11. Векторная величина, характеризующая быстроту изменения направления и численного значения скорости, называется:

А угловая скорость;

Б ускорение;

В угловое ускорение;

Г скорость.

12. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $a_\tau = 3$ *м/с*^{2}. Определить нормальное ускорение точки, в момент времени, когда ее полное ускорение $a = 5$ *м/с*^{2}.

А 1,66;

Б 2;

В 4;

Г 8;

Д 15.

13. При равномерном криволинейном движении точки …. ускорение не равно нулю:

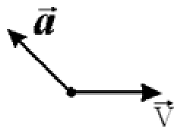
А нормальное.

Б касательное.

В угловое.

Г любое.

14.В некоторый момент времени скорость и ускорение материальной точки направлены друг относительно друга так, как показано на рисунке. Какое из нижеприведенных утверждений справедливо?



А Движение прямолинейное, равноускоренное.

Б Движение криволинейное, равномерное.

В Движение прямолинейное и ускоренное.

Г Движение криволинейное и замедленное.

Д Движение криволинейное и ускоренное.

15. Касательное ускорение точки можно определить, взяв первую производную от .... по времени:

А перемещения.

Б радиуса – вектора.

В координаты.

Г скорости.

16.Если касательное ускорение точки постоянно, движение называется:

А равномерным прямолинейным;

Б равнопеременным;

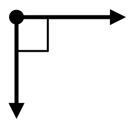
В равномерным криволинейным;

Г движение точки отсутствует.

Тема №3

17. В некоторый момент времени скорость и ускорение материальной точки направлены друг относительно друга так, как показано на рисунке. Какое из нижеприведенных утверждений справедливо?

А движение прямолинейное, равноускоренное.



Б движение криволинейное, равномерное.

В движение прямолинейное и ускоренное.

Г движение криволинейное и замедленное.

Д движение криволинейное и ускоренное.

18. Если скорость и касательное ускорение точки направлены в одну сторону, движение:

А равномерное;

Б отсутствует;

В ускоренное;

Г замедленное.

19. При равномерном прямолинейном движении точки, её ускорение равно:

А угловому ускорению;

Б нормальному ускорению;

В нулю;

Г касательному ускорению.

20. Если скорость и касательное ускорение точки направлены в разные стороны, то движение:

А отсутствует.

Б ускоренное.

В равномерное.

Г замедленное.

21. Сколько независимых уравнений движения описывают поступательное движение твердого тела?

А 0;

Б 1;

В 2;

Г 3;

Д 4.

22. Квадратная пластина *ABCD* совершает поступательное движение в плоскости *Oxy.* Определить ускорение точки *C,* если известно, что нормальное ускорение точки *A* $a^n_A = 4$ *м/с*^{2}, а касательное ускорение точки *B* $a^\tau_B = 3$ *м/с*^{2}.

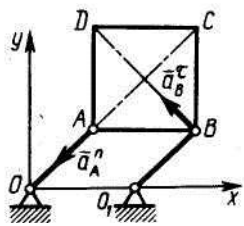
А 1;

Б 1,33;

В 5;

Г 7;

Д 2.



23. Угловая скорость маховика изменяется согласно закону $\omega = \pi(6t - t^2)$. Определить время $t > 0$ остановки маховика.

А 2;

Б 3;

В 4;

Г 5;

Д 6.

24. Нормальное ускорение точки вращающегося тела, пропорционально:

А угловому ускорению;

Б угловой скорости;

В времени;

Г второй степени угловой скорости.

Тема №4

25. Если траекториями всех точек тела являются окружности с центрами на одной прямой, такое движение называется:

А поступательное.

Б плоское.

В вращательное.

Г сложное.

26. Скорость точки вращающегося тела пропорциональна:

А углу поворота;

Б времени;

В угловой скорости;

Г угловому ускорению.

27. Касательное ускорение точки вращающегося тела пропорционально:

А угловой скорости;

Б нормальному ускорению;

В угловому ускорению;

Г скорости движения точки.

28. Характеристикой быстроты изменения угловой скорости служит:

А ускорение;

Б скорость;

В угловое ускорение;

Г угловая скорость.

29. Если угловое ускорение равно нулю, то вращательное движение:

А ускоренное;

Б замедленное;

В равномерное;

Г отсутствует.

30. Быстрота изменения угла поворота во времени характеризуется величиной, которая называется:

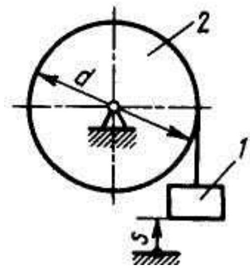
А скорость;

Б ускорение;

В угловая скорость;

Г угловое ускорение

31. Груз *1* поднимается с помощью лебедки *2.* Закон движения груза имеет вид: s = 7 + 5 t^2, где s - в см. Определить угловую скорость барабана в момент времени *t* = 3 с, если его диаметр *d* = 50 см.



А 0,60;

Б 1,04;

В 1,20;

Г 2,08;

Д 750.

32. Если вращательное движение ускоренное, то векторы угловой скорости и углового ускорения направлены:

А параллельно;

Б в разные стороны;

В перпендикулярно;

Г в одну сторону.

Тема №5

33. Передаточным отношением от одного вала к другому называется взятое со знаком плюс или минус отношение их:

А скоростей;

Б ускорений;

В угловых скоростей;

Г угловых ускорений.

34. Если вращательное движение замедленное, то векторы угловой скорости и углового ускорения направлены:

А перпендикулярно;

Б параллельно;

В в одну сторону;

Г в разные стороны.

35. Какая величина иногда в технике измеряется в об/мин?

А угол поворота;

Б угловое ускорение;

В угловая скорость;

Г количество движения;

Д угол поворота.

36. Числовое значение, какой величины в данный момент времени равно второй производной от угла поворота тела по времени?

А ускорения;

Б углового ускорения;

В скорости;

Г угловой скорости.

37.Вращательное ускорение измеряется в … .

А (м/с);

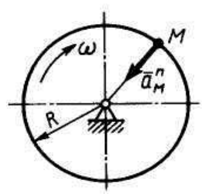
Б (об/мин);

В (рад/с);

Г (рад/$с^2$);

Д (м/$с^2$).

38. Нормальное ускорение точки *M* диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 6,4 м/с^2. Определить угловую скорость *ω* этого диска, если его радиус *R = 0,4 м*.



А 2,56;

Б 4;

В 5;

Г 16.

39. Угловая скорость тела изменяется по закону *ω = 2t^3*. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии *r = 0,2 м* от оси вращения в момент времени *t = 2 с*.

А 3,2;

Б 4,8;

В 12;

Г 16;

Д 24.

40. Тело вращается согласно закону *φ = 1 + 4t.* Определить ускорение точки тела на расстоянии *r = 0,2 м* от оси вращения.

А 3,2;

Б 4,8;

В 12;

Г 16;

Д 24.

Тема №6

41. Когда все точки тела движутся параллельно заданной неподвижной плоскости, оно совершает … движение.

А поступательное;

Б сложное;

В вращательное;

Г плоское;

Д сферическое

42. Проекции скоростей двух точек твёрдого тела на прямую, соединяющую эти точки … .

А параллельны;

Б перпендикулярны;

В равны нулю;

Г равны друг другу;

Д не равны.

43. Мгновенный центр скоростей, это точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени:

А равна нулю;

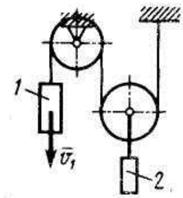
Б перпендикулярна перемещению;

В параллельна скорости;

Г максимальна;

Д минимальна.

44. Скорость груза 1 V_1 = 0,5 м/с. Определить скорость груза *2*.



А 0.2;

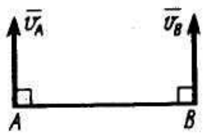
Б 0.25;

В 0.5;

Г 1;

Д 1,5.

45. Стержень *АВ* длиной 60 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки *А* и *В* стержня имеют скорости $V_A = V_B = 0{,}5$ *м/с*. Определить модуль мгновенной угловой скорости стержня.



А 30;

Б 15;

В 0,5;

Г 0,3;

Д 0

46. Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от

А оси вращения;

Б центра тяжести тела;

В мгновенного центра скоростей;

Г полюса.

47. Твердое тело совершает плоскопараллельное движение согласно уравнениям $x_A = 2t^2$, $y_A = 0{,}2$ *м*, $\varphi = 10t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 1$ *с*.

А 2;

Б 4;

В 10;

Г 20;

Д 100.

48. В данном положении механизма точка *P* является мгновенным центром скоростей звена *AB.* Определить расстояние *BP,* если скорости точек *A* и *B* равны соответственно v_A = 10 м/с, v_B = 15 м/с, а расстояние *AP* = 60 см.

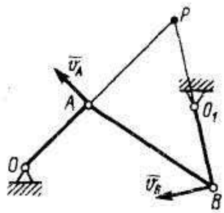
А 0,16;

Б 0,25;

В 0,41;

Г 0,90;

Д 16,60.



Тема №7

49. Колесо катится согласно уравнениям $x_c = 2t^2$, y_c = 0.5 м. Определить угловое ускорение ε колеса.

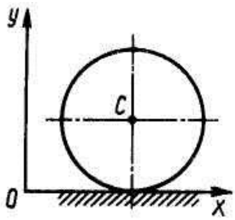
А 1;

Б 4;

В 8;

Г 10;

Д 11.



50. Ускорение любой точки плоской фигуры геометрически складывается из векторов:

А. относительного и переносного ускорений;

Б относительного, переносного и Кориолисова ускорений;

В ускорения полюса и ускорения точки при движении вокруг полюса;

Г нормального и касательного ускорений;

Д скорости и радиуса вектора.

51. Центр *C* барабана, разматывающего нить, движется вертикально вниз по закону y_c = 0,33t^2. Определить угловое ускорение барабана, если радиус *r* = 0,066 м.

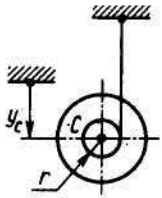
А 0.10;

Б 0.20;

В 0.66;

Г 10;

Д 20.



52. Центр катящегося по плоскости колеса радиуса 0,5 м движется согласно уравнению S = 2t. определить ускорение точки соприкосновения колеса с плоскостью.

А 1;

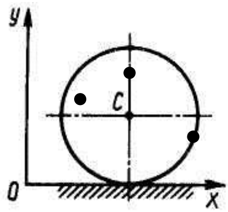
Б 1,5;

В 2,5;

Г 4;

Д 8.

53. По горизонтальной линии катится диск, на поверхности которого отмечены точки a, b, c, d. Укажите две точки, имеющие меньшую скорость.



А a и b;

Б a и c;

В c и d;

Г b и c**;**

Д b и d.

54. Ускорения точек тела при плоскопараллельном движении пропорциональны расстояниям от точек до … .

А центра вращения;

Б мгновенного центра ускорений;

В мгновенного центра скоростей;

Г полюса;

Д центра тяжести тела.

55. Тело совершает плоское движение и известны направления скоростей двух его точек V_a и V_c. Укажите две точки данного тела имеющие большую скорость.

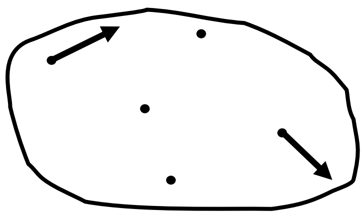
А a и b;

Б a и c;

В c и d;

Г b и c;

Д e и d.



56. При каком движении тело не имеет МЦС.

А при поступательном;

Б при сложном;

В при вращательном;

Г при плоском.

Тема №8

57. Если точка одновременно участвует в двух или более движениях то такое ее движение называется … .

А поступательное;

Б плоское;

В вращательное;

Г сложное;

Д сферическое.

58. Абсолютная скорость точки равна:

А производной от радиуса вектора по времени;

Б геометрической сумме ее проекций на оси координат;

В геометрической сумме переносной и относительной скоростей;

Г геометрической сумме, скорости полюса и скорости точки при вращении вокруг этого полюса.

Д нулю

59. Если точка движется вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной, такое движение называется ... .

А переносным;

Б относительным;

В абсолютным;

Г плоским;

Д сферическим.

60. В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки определяется по теореме:

А Пуассона; **Б** Кулона;

В Кориолиса; **Г** Вариньона; **Д** Шнейдера.

61. Прямолинейная трубка вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной оси *O* по закону $\varphi = 0,5t$, где φ - в рад, *t* – в с. Внутри трубки движется шарик *M* по закону

***OM* = *s* = 0,4 *t*, где s - в м, *t* - в с. Найти переносную скорость шарика в момент t_1 =2 с.**

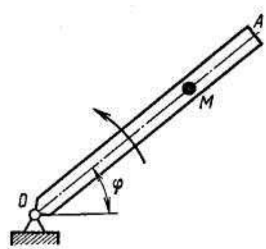
А 0,40;

Б 0,90;

В 1;00

Г 1,25;

Д 0,63.



62. Движение точки относительно подвижной системы отсчёта называется .

А переносным; **Б** относительным; **В** сложным; **Г** абсолютным; **Д** плоским.

63. Сложное движение точки состоит из движений:

А поступательного и вращательного;

Б переносного и относительного;

В поступательного и плоского;

Г вращательного и сферического.

64. Движение точки относительно неподвижной системы отсчёта называется:

А абсолютным;

Б относительным;

В переносным;

Г поступательным;

Д плоским.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание К-1

По уравнениям движения точки M для заданного момента времени t найти положение точки на траектории, уравнения самой траектории, ее скорость, ускорение и радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Координаты x и y даны в метрах, время – в секундах.

№ вар.	x, м	y, м	t, с	№ вар.	x, м	y, м	t, с
1	t^2+2t+4	$2t^2+4t+3$	1	16	$4t+3$	$\frac{-5}{4t+3}$	1/2
2	$5\cos\frac{\pi t}{3}$	$5\sin\frac{\pi t}{3}$	1/2	17	$t+1$	t^2	1
3	$t+2$	$\frac{2}{t+2}$	2	18	$\frac{\pi t}{2}$	$3\sin\frac{\pi t}{2}$	1
4	t	t^2+2t+1	1	19	t^2	$3t^2+2$	2
5	$3\cos\frac{\pi t}{4}$	$5\sin\frac{\pi t}{4}$	1	20	$\frac{\pi t}{3}$	$2\cos\frac{\pi t}{3}$	1/2
6	πt	$\sin\pi t$	1/4	21	$7\sin\frac{\pi t}{4}$	$7\cos\frac{\pi t}{4}$	1
7	$4\cos\frac{\pi t}{6}$	$4\sin\frac{\pi t}{6}$	1	22	$\sin^2\frac{\pi t}{3}$	$\cos^2\frac{\pi t}{3}$	2
8	t^3+t-2	$2t^3+2t+1$	1/2	23	$3\sin\frac{\pi t}{6}$	$4\cos\frac{\pi t}{6}$	1
9	$2\cos\frac{\pi t}{4}+3$	$5\sin\frac{\pi t}{4}$	1	24	$5\sin\frac{\pi t}{3}-2$	$5\cos\frac{\pi t}{3}$	1/2
10	$-t-1$	$\frac{-2}{t+1}$	0	25	t^2+t	$2t^2+2t+3$	1
11	$2t+1$	$3t^2+5$	1	26	$t+2$	t^2	1
12	$\frac{\pi t}{2}$	$\cos\frac{\pi t}{2}$	1/2	27	t^5+1	t^5-5	1
13	t	$3t-2$	1	28	$3t+1$	$\frac{4}{3t+1}$	1
14	$3\cos\frac{\pi t}{4}$	$3\sin\frac{\pi t}{4}$	2	29	$4\sin\frac{\pi t}{6}$	$3\cos\frac{\pi t}{6}+2$	1
15	$4\cos\frac{\pi t}{3}$	$2\sin\frac{\pi t}{3}$	1	30	$3\cos^2\frac{\pi t}{4}$	$5\sin^2\frac{\pi t}{4}$	1

Пример выполнения задания К-1.

Даны уравнения движения точки в плоскости Oxy:

$$x = 2cos\frac{\pi t}{4} + 3 \text{ (см)}; \; y = 2sin\frac{\pi t}{4} \text{ (см)}.$$

Определить уравнение траектории точки, скорость и ускорение точки, в том числе касательное и нормальное ускорения для момента времени $t = 1$ с, радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение:

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Для этого находим выражение тригонометрических функций

$$cos\frac{\pi t}{4} = \frac{x-3}{2}; \; sin\frac{\pi t}{4} = \frac{y}{2}.$$

Возведя обе части в квадрат и сделав соответствующие преобразования, получим:

$$cos^2\frac{\pi t}{4} = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2; \; sin^2\frac{\pi t}{4} = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \text{ или}$$

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1, \text{ или } (x-3)^2 + y^2 = 2^2.$$

График этой функции (окружность) изображен на рисунке 64.

Радиус окружности R равен 2 см.

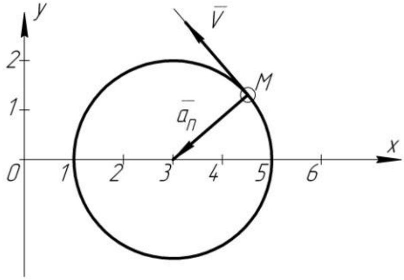


Рис. 64

Положение точки M на траектории через время $t = 1$ с будет определяться координатами $x = 4{,}4$ см;

$y = 1{,}4$ см.

Скорость точки M найдем по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где V_x и V_y проекции скорости V на оси координат, которые находятся дифференцированием по времени уравнений движения точки:

$V_x = \dot{x} = 2\left(-sin\,\frac{\pi t}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4}$; при $t = 1$ с, $V_x = -1{,}1$ см/с.

$V_y = \dot{y} = 2\left(cos^2\,\frac{\pi t}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4}$; при $t = 1$ с, $V_y = 1{,}1$ см/с.

Тогда $V = \sqrt{(-1{,}1)^2 + 1{,}1^2} \approx 1{,}6$ см/с.

Аналогично находим ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где $a_x = \ddot{x} = -\frac{\pi}{2}\left(cos\frac{\pi t}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4}$; при $t = 1$ с,

$$a_x = -0{,}87 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = 2\left(-sin\frac{\pi t}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4}; \text{ при } t = 1 \text{ с},$$

$$a_y = -0{,}87 \text{ см/с}^2;$$

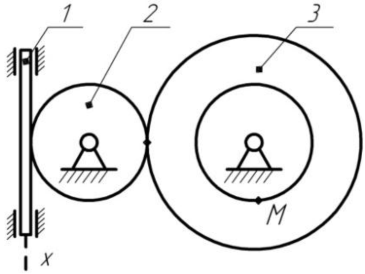
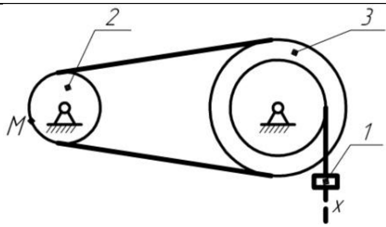
$$a = \sqrt{(-0{,}87)^2 + (-0{,}87)^2} = 1{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение a_τ определяем по формуле $a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = 0$. Тогда нормальное ускорение a_n равно полному a.

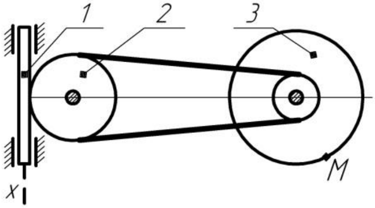
<u>Ответ</u>: $V = 1{,}6$ см/с; $a_\tau = 0$; $a_n = 1{,}2$ см/с^2; $R = 2$ см.

Задание К-2

По известным уравнениям движения груза или рейки для приведенных схем механизмов определить скорость точки M в данный момент времени. Движение рейки или груза считать направленным вниз вдоль оси x.

1		$x_1 = 2t^2 + 4t + 3$ см; $t = 2$ с; $R_2 = 8$ см; $R_3 = 16$ см; $r_3 = 10$ см.
2		$x_1 = 4t^2 + 2t + 5$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 10$ см; $R_3 = 24$ см; $r_3 = 18$ см.

3



$x_1 = 7t^2 + t + 1$ см;

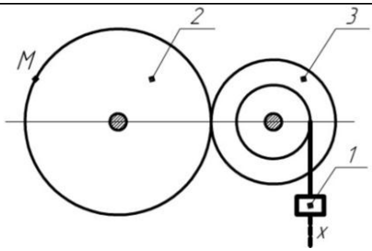
$t = 0{,}5$ с;

$R_2 = 16$ см;

$R_3 = 24$ см;

$r_3 = 8$ см.

4



$x_1 = 12t^2 + 5t - 1$ см;

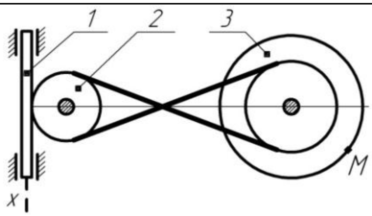
$t = 1$ с;

$R_2 = 30$ см;

$R_3 = 20$ см;

$r_3 = 16$ см.

5



$x_1 = 8t^2 + 5t - 2$ см;

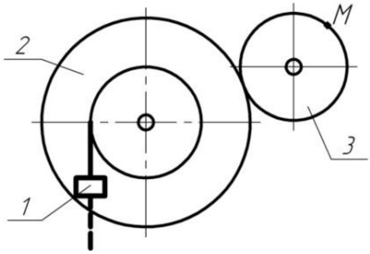
$t = 1$ с;

$R_2 = 8$ см;

$R_3 = 18$ см;

$r_3 = 12$ см.

6



$x_1 = 10t^2 + 8t + 3$ см;

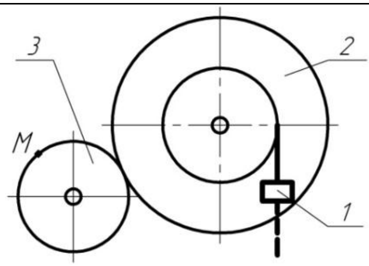
$t = 0{,}5$ с;

$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 10$ см;

$r_2 = 12$ см.

7



$x_1 = 3t^2 + 5t + 2$ см;

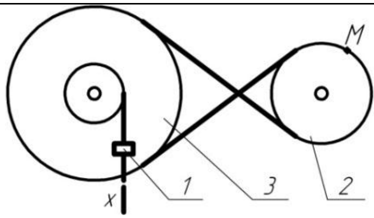
$t = 2$ с;

$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 22$ см;

$r_2 = 16$ см.

8



$x_1 = 12t^2 + 3t + 4$ см;

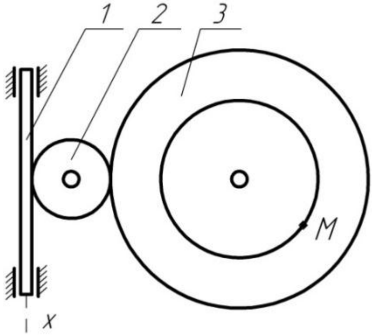
$t = 1$ с;

$R_2 = 16$ см;

$R_3 = 30$ см;

$r_3 = 20$ см.

9



$x_1 = 9t^2 + 6t - 2$ см;

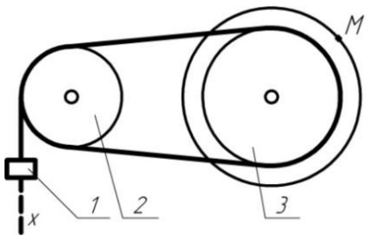
$t = 1$ с;

$R_2 = 10$ см;

$R_3 = 30$ см;

$r_3 = 20$ см.

10



$x_1 = 7t^2 + 6t - 1$ см;

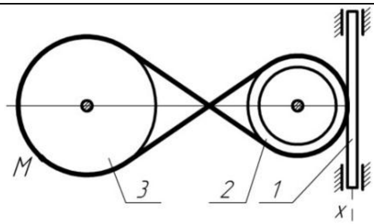
$t = 2$ с;

$R_2 = 10$ см;

$R_3 = 20$ см;

$r_3 = 16$ см.

11



$x_1 = t^2 + 8t + 3$ см;

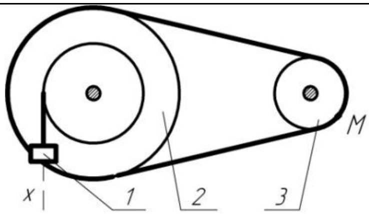
$t = 2$ с;

$R_2 = 14$ см;

$R_3 = 20$ см;

$r_2 = 12$ см.

12



$x_1 = 4t^2 + 5t - 2$ см;

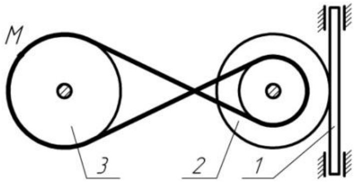
$t = 1$ с;

$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 10$ см;

$r_2 = 12$ см.

13



$x_1 = 9t^2 + 4t - 1$ см;

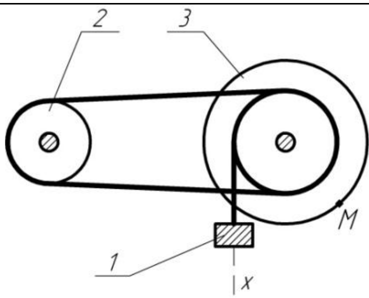
$t = 1$ с;

$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 22$ см;

$r_2 = 12$ см.

14



$x_1 = 5t^2$ см;

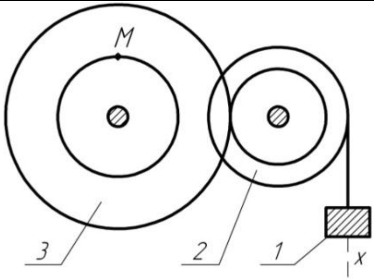
$t = 2$ с;

$R_2 = 10$ см;

$R_3 = 20$ см;

$r_3 = 14$ см.

15



$x_1 = 2t^2 + 4t + 3$ см;

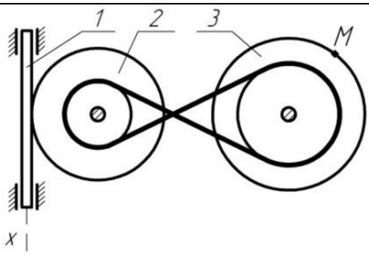
$t = 2$ с;

$R_2 = 8$ см;

$R_3 = 16$ см;

$r_3 = 10$ см.

16



$x_1 = 6t^2 + t$ см;

$t = 1$ с;

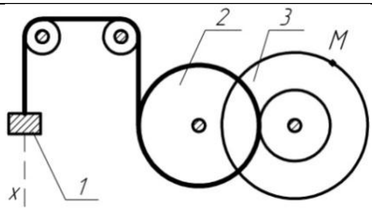
$R_2 = 14$ см;

$R_3 = 20$ см;

$r_3 = 16$ см;

$r_2 = 8$ см.

17



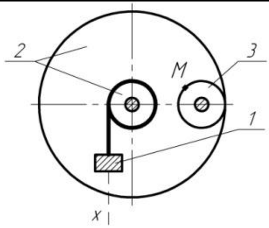
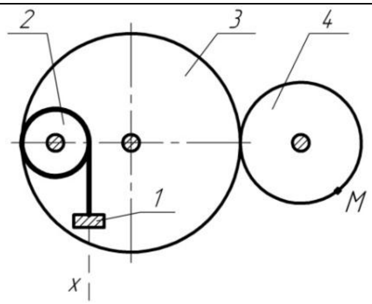
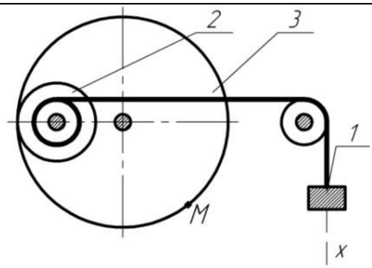
$x_1 = 3t^3$ см;

$t = 2$ с;

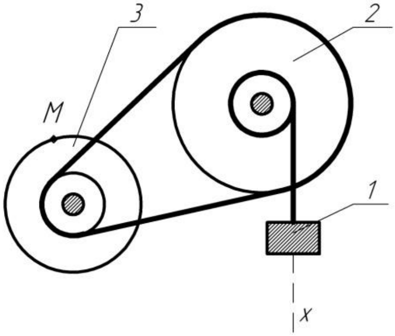
$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 30$ см;

$r_3 = 15$ см.

18		$x_1 = 13t^2 + 5t + 2$ см; $t = 0{,}5$ с; $R_2 = 30$ см; $R_3 = 12$ см; $r_2 = 12$ см.
19		$x_1 = 2t^3 + 3t^2 + 4$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 8$ см; $R_3 = 30$ см; $R_4 = 11$ см.
20		$x_1 = 6t^2 + 5t + 4$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 12$ см; $R_3 = 28$ см; $r_2 = 6$ см.

21



$x_1 = t^2 + 10t$ см;

$t = 1$ с;

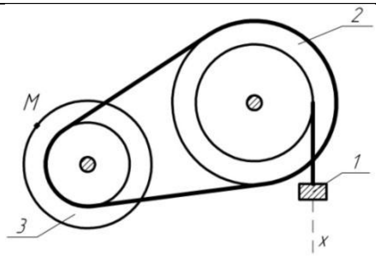
$R_2 = 20$ см;

$R_3 = 16$ см;

$r_2 = 8$ см;

$r_3 = 8$ см.

22



$x_1 = 11t^2 + 16t - 3$ см;

$t = 1$ с;

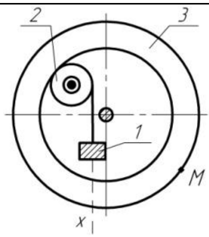
$R_2 = 28$ см;

$R_3 = 16$ см;

$r_2 = 20$ см;

$r_3 = 10$ см.

23



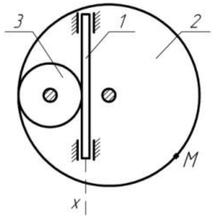
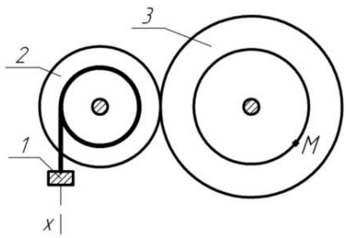
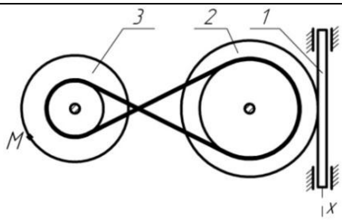
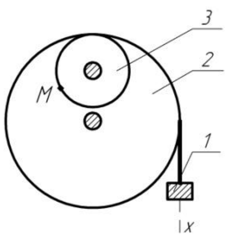
$x_1 = 14t^2 + 7$ см;

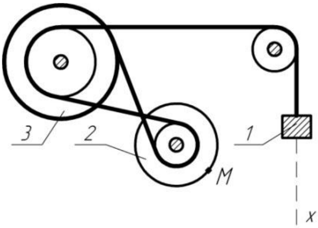
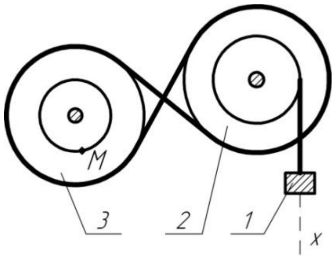
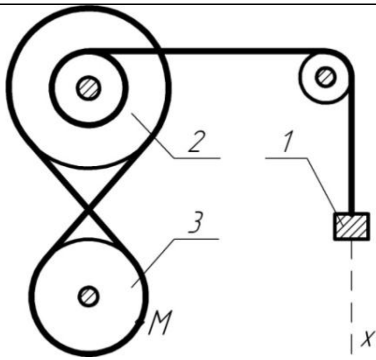
$t = 0{,}5$ с;

$r_2 = 8$ см;

$R_3 = 28$ см;

$r_3 = 20$ см.

24		$x_1 = 4t^2 + 7t + 3$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 20$ см; $R_3 = 6$ см.
25		$x_1 = 4t^3 + 3$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 16$ см; $R_3 = 28$ см; $r_2 = 12$ см; $r_3 = 20$ см.
26		$x_1 = 3t^2 + 9t + 1$ см; $t = 0{,}5$ с; $R_2 = 40$ см; $R_3 = 36$ см; $r_2 = 30$ см; $r_3 = 20$ см.
27		$x_1 = 2t^3 + 4t$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 30$ см; $R_3 = 13$ см.

28		$x_1 = x^2 + 2x + 3$ см; $t = 2$ с; $R_2 = 20$ см; $R_3 = 26$ см; $r_2 = 10$ см; $r_3 = 14$ см.
29		$x_1 = 4t^3 - 5t$ см; $t = 1$ с; $R_2 = 22$ см; $R_3 = 20$ см; $r_2 = 12$ см; $r_3 = 10$ см.
30		$x_1 = 10t^2 + 3t$ см; $t = 0{,}5$ с; $R_2 = 20$ см; $R_3 = 17$ см; $r_2 = 10$ см.

Пример выполнения задания К-2.

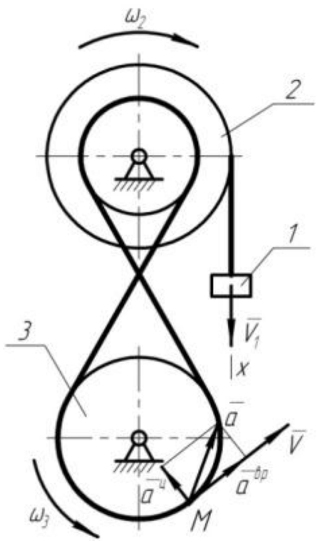


Рис. 65

По уравнению движения груза 1 $x_1 = 18t^2 + 3t + 13$ см для приведенной схемы, изображенной на рисунке 65, найти скорость и ускорение точки M для момента времени $t = 1$ с, если радиусы шкивов равны:

$R_2 = 24$ см, $R_3 = 20$ см,

$r_2 = 16$ см.

<u>*Решение*</u>. Зная уравнение движения груза 1, можно найти его скорость V_1:

$$V_1 = \dot{x}_1 = 36t + 3. \qquad (1)$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза V_1 и угловые скорости колес ω_2 и ω_3. В соответствии со схемой механизма

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \omega_2 R_2; \\ r_2\omega_2 &= R_2\omega_2. \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

откуда $\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{36t+3}{24} = 1{,}5t + 0{,}125$.

Тогда $\omega_3 = \frac{r_2\omega_2}{R_3} = \frac{16(1{,}5t+0{,}125)}{20} = 1{,}2t + 0{,}1$.

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Численно значение угловой скорости колеса 3 равно

$$\omega_3 = 1{,}3 \text{ рад/с}.$$

Скорость точки M определяется по формуле

$$V_M = \omega_3 R_3 = 1{,}3 \cdot 20 = 26 \text{ см/с}.$$

Полное ускорение точки M равно

$$a_M = \sqrt{(a^{\text{ц}})^2 + (a^{\text{вр}})^2},$$

где вращательное и центростремительное ускорение равны

$$a^{\text{вр}} = R_3\varepsilon_3 == 24 \text{ см/с}^2, a^{\text{ц}} = R_3\omega_3^2 = 33{,}8 \text{ см/с}^2,$$

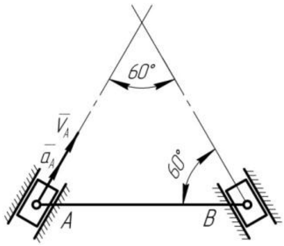
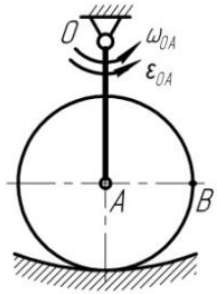
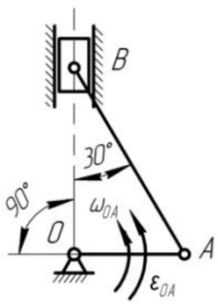
$$a_M = \sqrt{(33{,}8)^2 + (24)^2} = 41{,}5 \text{ см/с}^2.$$

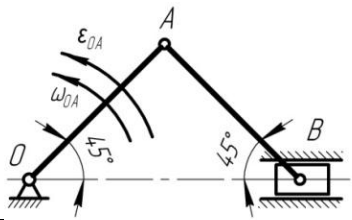
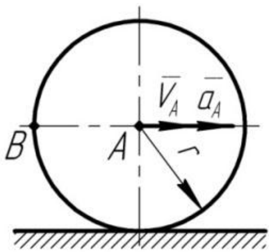
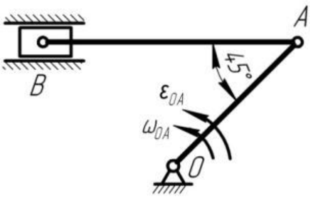
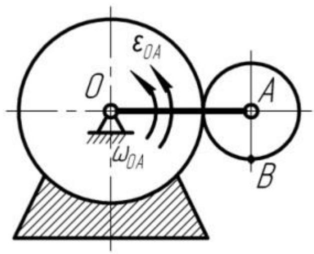
Скорость и ускорения точки M показаны на рисунке 65.

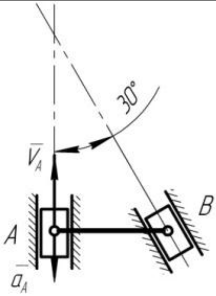
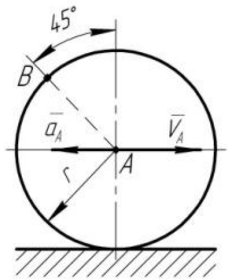
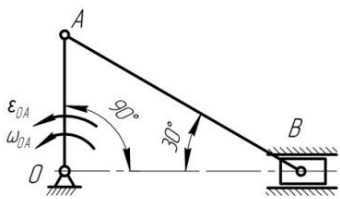
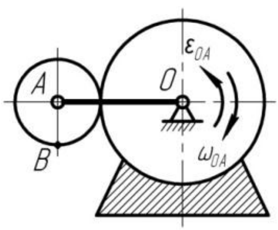
<u>*Ответ*</u>: $V_M = 26$ см/с, $a_M = 41{,}5$ см/с^2.

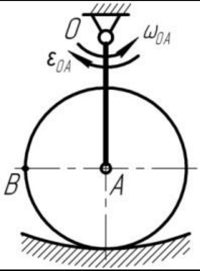
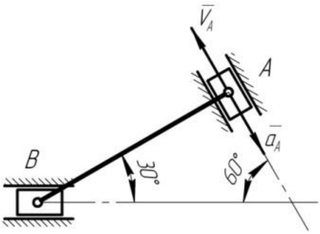
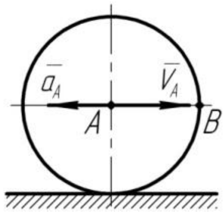
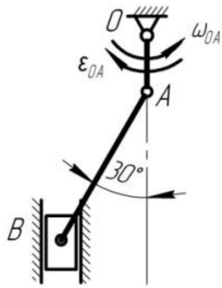
Задание К-3

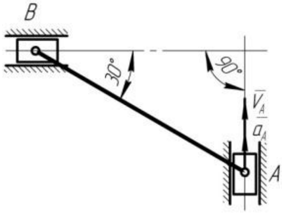
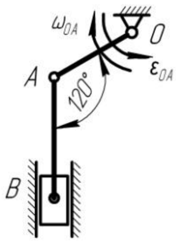
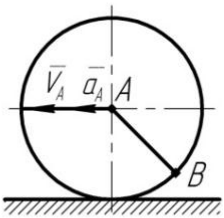
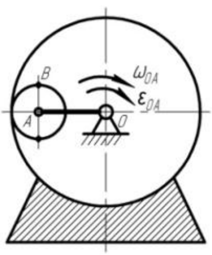
Найти скорость и ускорение точки В для заданного положения механизма, а так же угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эта точка принадлежит.

1		$V_A = 2$ м/с; $a_A = 1{,}2$ м/с^2; $AB = 1$ м.
2		$\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r = 15$ см; $OA = 25$ см.
3		$\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA = 30$ см.

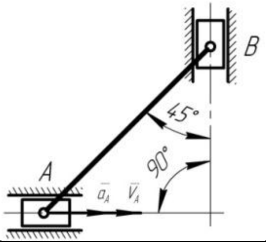
4		$\varepsilon_{OA} = 4$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA = 30$ см; $AB = 30$ см.
5		$V_A = 60$ см/с; $r = 40$ см; $a_A = 100$ см/с^2.
6		$\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $OA = 20$ см; $AB = 34$ см.
7		$OA = 35$ см; $\omega_{OA} = 1$ рад/с; $r = 15$ см; $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2.

8 	$V_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2; $AB = 1$ м.
9 	$V_A = 60$ см/с; $a_A = 40$ см/с^2; $r = 25$ см.
10 	$\varepsilon_{OA} = 4$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 3$ рад/с; $OA = 40$ см.
11 	$\varepsilon_{OA} = 10$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 30$ рад/с; $OA = 40$ см; $r = 20$ см.

12		$\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 3$ рад/с; $OA = 40$ см; $r = 20$ см.
13		$V_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2; $AB = 2$ м.
14		$V_A = 35$ см/с; $a_A = 30$ см/с^2; $r = 30$ см.
15		$\varepsilon_{OA} = 3$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA = 10$ см; $AB = 25$ см.

16		$V_A = 3$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2; $AB = 1$ м.
17		$\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 3$ рад/с; $OA = 10$ см; $AB = 20$ см.
18		$V_A = 30$ см/с; $a_A = 20$ см/с^2; $r = 25$ см.
19		$\varepsilon_{OA} = 1{,}5$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA = 30$ см; $r = 12$ см.

20

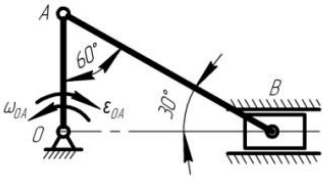


$V_A = 1{,}2$ м/с;

$a_A = 1$ м/с^2;

$AB = 1{,}2$ м.

21

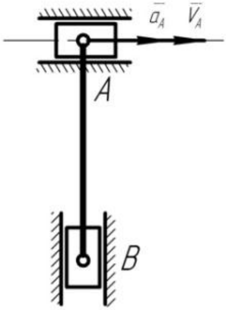


$\varepsilon_{OA} = 20$ рад/с^2;

$\omega_{OA} = 40$ рад/с;

$OA = 60$ см.

22

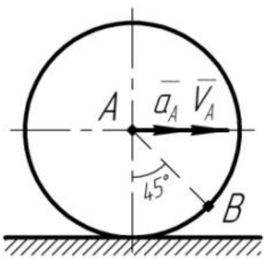


$V_A = 3$ м/с;

$a_A = 1$ м/с^2;

$AB = 1{,}5$ м.

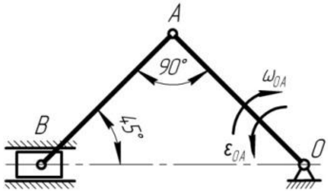
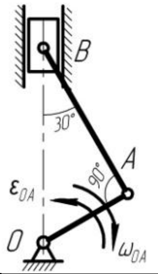
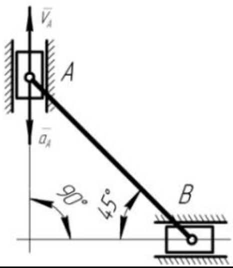
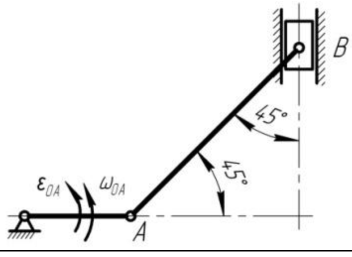
23



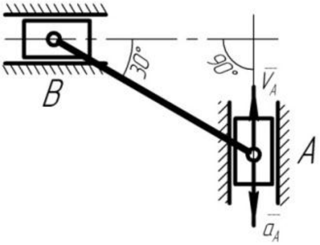
$V_A = 60$ см/с;

$a_A = 30$ см/с^2;

$r = 80$ см.

24		$\varepsilon_{OA} = 20$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 70$ рад/с; $OA = 20$ см; $AB = 20$ см.
25		$\varepsilon_{OA} = 10$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 20$ рад/с; $OA = 15$ см.
26		$V_A = 0{,}2$ м/с; $a_A = 0{,}2$ м/с^2; $AB = 1$ м.
27		$\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2; $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA = 0{,}1$ м; $AB = 0{,}2$ м.

28

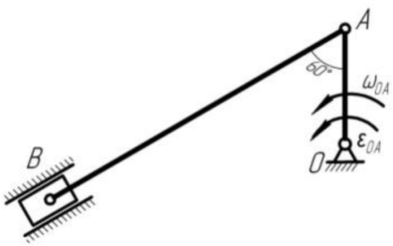


$V_A = 1$ м/с;

$a_A = 1$ м/с^2;

$AB = 2$ м.

29



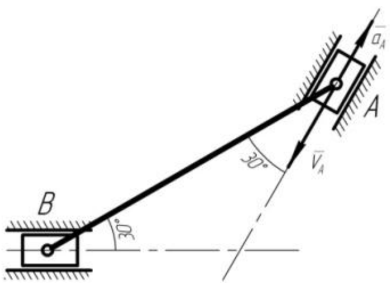
$\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2;

$\omega_{OA} = 2$ рад/с;

$OA = 20$ см;

$AB = 60$ см.

30



$V_A = 1{,}2$ м/с;

$a_A = 0{,}8$ м/с^2;

$AB = 0{,}9$ м.

Пример выполнения задания К-3.

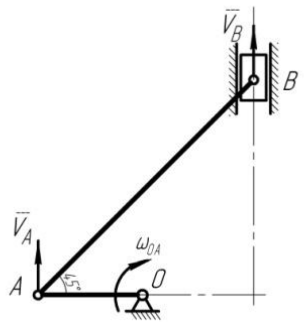


Рис. 66

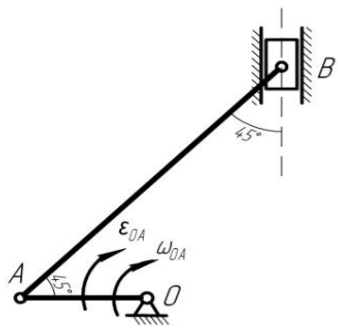
Найти для заданного положения механизма скорость и ускорение точки B, а так же угловую скорость и угловое ускорение звена *AB*, если кривошип *OA* длиной 0,15 м имеет угловую скорость $\omega_{OA} = 2\ рад/с$ и угловое ускорение $\varepsilon_{OA} = 1\ рад/с^2$. Длина шатуна AB = 0,4 м.

<u>*Решение*</u>.

1. Определение скоростей. Вычислим скорость точки *A* (рис. 67):

$$V_A = \omega_{OA} \mathrm{OA} = 0{,}3\ \mathrm{м/с},$$

где $\bar{V}_A \perp \mathrm{OA}$.



Скорость V_B ползуна направлена вертикально вверх и $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$. Значит, шатун AB совершает мгновенно-поступате-льное движение и, поэтому, скорость ползуна B равна скорости точки A:

Рис. 67

$V_B = V_A = 0{,}3$ м/с. Следовательно, угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = 0$.

2. Определение ускорений. Ускорение точки B, согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры, равно:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}$$

или

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{AB}^{\tau} + \bar{a}_{AB}^{n},$$

где $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$;

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} OA = 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}15 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^{n} = \omega_{OA}^2 OA = 2^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Так как угловая скорость $\omega_{AB} = 0$, то нормальное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A $a_{AB}^{n} = \omega_{AB}^2 AB = 0$.

Вектор $\bar{a}_A^{n}$ направлен от A к O. Вектор $\bar{a}_A^{\tau}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}_A^{n}$ и направлен в сторону вектора $\bar{V}_A$ (вращение

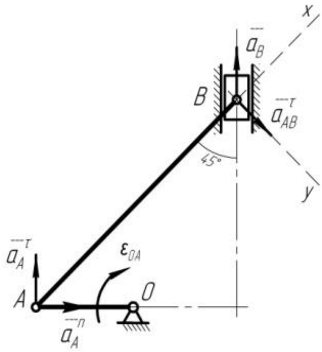


Рис. 68

кривошипа OA – ускоренное). Вектор $\bar{a}_B$ направлен вдоль направляющих ползуна, $\bar{a}_{AB}^{\tau}$ – перпендикулярно AB. Зададим их направления по указанным линиям (рис. 68). Выбрав направления осей x и y, как показано на рисунке 68, получаем:

$$a_B cos45° = a_A^{\tau} cos45° + a_A^{n} cos45°$$

,

откуда $a_B = 0{,}75$ м/с^2.

Для определения углового ускорения звена AB спроецируем это же векторное уравнение на ось y:

$$a_B cos45° = a_A^{n} cos45° - a_A^{\tau} cos45° + a_{AB}^{\tau}.$$

Откуда $a_{AB}^{\tau} = cos45°(a_B - a_A^{n} + a_A^{\tau}) = 0{,}21$ м/с^2.

Так как $a_{AB}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AB$, то

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{\tau}}{AB} = \frac{0,21}{0,4} = 0,525 \text{ рад/с}^2.$$

Ответ: $V_B = 0,3$ м/с; $a_B = 0,75$ м/с^2; $\omega_{AB} = 0$; $\varepsilon_{AB} = 0,525$ рад/с^2.

Задание К-4

По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела Д определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Необходимые для расчета данные и схемы механизмов ниже приведены в таблицах.

№ вар.	Уравнение относительного движения точки $OM = S_r(t)$, см	Уравнение движения тела $\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	t_1, с	R, см	a, см	α, градус
1	$3t + 2t^3$	$4t^2 + t$	2	35	-	-
2	$14 sin\frac{\pi t}{4}$	$3t^3 - t$	2/3	-	20	-
3	$20 sin\frac{\pi t}{3}$	$5t^2 - 2t$	1	-	30	-
4	$2\pi t^3$	$2t^2 + t$	1	20	25	-
5	$6(t^2 + t)$	$0,4t^3$	2	-	40	60
6	$9 sin 2\pi t$	$2t^2 + 3t$	1/6	-	-	-
7	$16 cos 2\pi t$	$3t^2$	1/8	-	30	60
8	$12t^2 + 2$	$t^3 - 2t$	2	-	-	45
9	$10\pi cos\frac{\pi t}{3}$	$6t^2 - t$	1	25	25	-
10	$16 sin\frac{\pi t}{6}$	$2t^3 + 2t$	1	-	40	-
11	πt^2	$2t^2$	2	-	-	-
12	$40 sin \pi t$	$t - 0,4t^2$	1/4	-	16	-
13	$18 sin \pi t$	$0,6t^2 + t$	2/3	25	-	-
14	$15t^2 - t$	$0,4t^2$	2	-	30	-

15	$5t^2 - 2t$	$3t^2 - 7t$	3	50	-	-
16	$14cos\frac{\pi t}{3}$	$4t^2$	1	40	-	-
17	$16sin\frac{\pi t}{6}$	$t + 7t^2$	1	-	-	60
18	$20\pi t^2$	$8t^2$	1	-	10	-
19	πt^2	$0,5t^2$	3	30	-	-
20	$10\pi cos\frac{\pi t}{6}$	$5t + t^2$	1	50	-	-
21	$20t^2 - 3t$	$0,3t^2$	2	-	30	-
22	$60sin\pi t$	$40\pi t^2$	1/6	-	40	30
23	$50t^2 + 2t$	$5t^2$	1	-	-	45
24	$100t^2 - 40t$	πt^2	1	30	50	-
25	$35t^2$	t^2	1	-	-	-
26	$20t^2 - 4t$	$0,5\pi t^2$	2	-	100	60
27	$30t^2 + 20t$	$30\pi t^2$	1	35	50	-
28	$10(t^3 - 2t^2)$	$t^3 - 2t^2$	3	-	80	45
29	$80cos\frac{\pi t}{6}$	πt^3	1	40	-	45
30	$90sin\frac{\pi t}{6}$	$\pi t^2 + 2t$	1	50	-	-

Пример выполнения задания К-4.

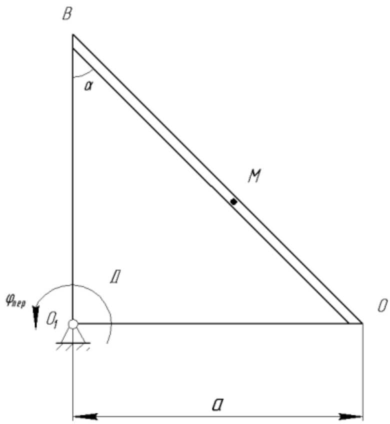


Рис. 69

Задача. Точка М движется относительно тела Д. Уравнением относительного движения точки М является $OM = S_{OT} = 5\sqrt{2}(t^2 + t)$ см, а переносного движения $\varphi_{пер} = 0{,}2t^3 + t$ рад. Определить для момента времени $t = 2c$ абсолютную скорость точки М, если $\alpha = 45^0$, катет прямоугольного треугольника равен $a = 50$ см.

Решение. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис.44) совпадает с плоскостью треугольника Д.

Найдем положение точки М на чертеже (рис. 69) через время $t = 2c$, которое определяется расстоянием $S_{OT} = OM$. При $t = 2c$

$$OM = S_{OT} = 5\sqrt{2}(2^2 + 2) = 42{,}2 \text{ см.}$$

Абсолютную скорость точки М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V_{аб}} = \overline{V}_{OT} + \overline{V}_{пер}.$$

Модуль относительной скорости будет равен

$$\overline{V}_{OT} = \dot{S}_{OT} = 5\sqrt{2}(2t+1) \qquad \text{при} \qquad t = 2c$$

$V_{OT} = 35\,{}^{см}\!/_{c}$.

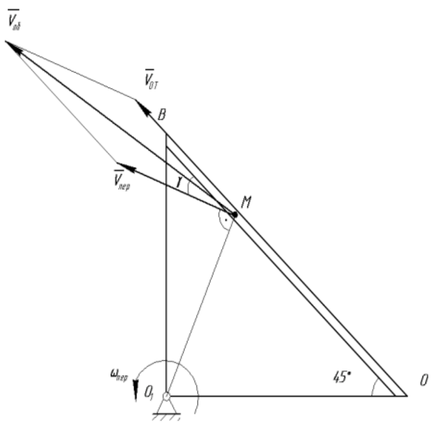


Рис. 70

Положительный знак у V_{OT} означает, что вектор $\overline{V}_{OT}$ направлен в сторону возрастания $\overline{V}_{OT}$ направлен в сторону возрастания S_{OT} (рис. 70) от точки О в сторону возрастания S_{OT} и проводим (строим) вектор $\overline{V}_{OT}$.

Модуль переносной скорости $V_{пер} = O_1M \cdot \omega_{пер}$.

где $\omega_{пер} = \dot{\varphi}_{пер} = 0{,}6t^2 + 1$

При $t = 2c$ $\omega_{пер} = 3{,}4\,\dfrac{рад}{c}$.

Положительный знак у $\omega_{пер}$ показывает, что поворот треугольника осуществляется в направлении $\varphi_{пер}$. Расстояние O_1M (радиус вращения) определяем по теореме косинусов

$$O_1M = \sqrt{O_1O^2 + OM^2 - 2 \cdot O_1O \cdot OM \cdot cos\,45^0} = 36{,}5 \text{ см.}$$

Тогда $V_{пер} = O_1M \cdot \omega_{пер} = 36{,}5 \cdot 3{,}4 = 124\,{}^{см}\!/_{с}$.

Абсолютная скорость будет

$$V_{аб} = \sqrt{V_{OT}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{OT} \cdot V_{пер} \cdot cos\gamma}\,.$$

Угол γ можно определить из треугольника O_1BM.

По теореме синусов имеем

$$\frac{O_1B}{sin(90^0 + \gamma)} = \frac{O_1M}{sin\,45^0}; \quad \gamma = 16^0\,.$$

Тогда

$$V_{аб} = \sqrt{35^2 + 124^2 + 2 \cdot 35 \cdot 124 \cdot cos16^0} = 158\,{}^{см}\!/_{с}$$

$$V_{аб} = 158\,{}^{см}\!/_{с}\,.$$

Найдем зависимость между относительными, переносными и абсолютными ускорениями точки.

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (1)$$

При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

где

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{OT}). \qquad (2)$$

В случае поступательного переносного движения $\omega = 0$ и $\bar{a}_{кор} = 0$. Тогда

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{OT} + \bar{a}_{пер}.$$

(3)

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_{OT}$ обозначить через α, будет равен

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |V_{OT}| \cdot sin\alpha. \qquad (4)$$

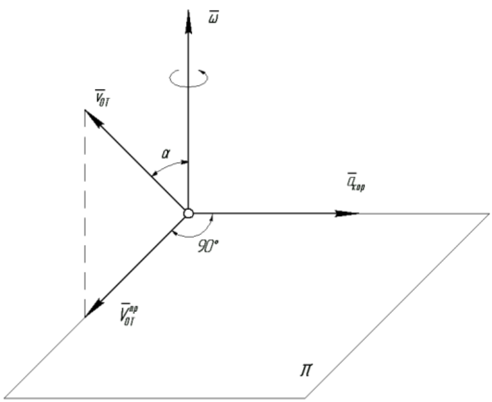


Рис. 71

Из рисунка 71 видно, что направление вектора $\bar{a}_{кор}$ можно определить, спроектировать вектор $\overline{V}_{OT}$ на плоскость П, перпендикулярную $\overline{\omega}$, и повернув эту проекцию $\overline{V}_{OT}^{np}$ на 90^0 в сторону переносного вращения.

Из формулы (76) видно, кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) когда $\omega = 0$, - переносное движение является поступательным;

2) $V_{OT} = 0$ т.е. относительная скорость в данный момент времени равна нулю;

3) когда $\alpha = 0$, или $\alpha = 180^0$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или вектор $\overline{V}_{OT}$ параллелен этой оси.

Задача. Прямоугольный треугольник ВАС, у которого $\angle BAC = 30^0$, а катет ВС = 15 см, вращается вокруг оси z по закону $\varphi = 4t^2 + 2t$. Вдоль гипотенузы АВ движется от ее середины О движется точка по закону.

$\mu = 5\,sin(\frac{\pi}{3}t)$ (ось μ направлена вдоль ВА). Найти абсолютное ускорение точки М в момент времени $t = 1\,c$.

Решение. 1. Рассмотрим относительное движение точки М вдоль гипотенузы. Определим положение точки М в момент времени $t = 1\,c$.

$$\mu = 5\sin(\frac{\pi}{3}t) = 4{,}33 \text{ см}$$

$$\mu = OM .$$

2. Определим V_{OT}. Относительное движение является прямолинейным, значит

$$V_{OT} = \dot{\mu} = \frac{5}{3}\pi cos(\frac{\pi}{3}t).$$

При $t = 1\,c$, $V_{OT} = 2{,}6 \, {см}/{c}$.

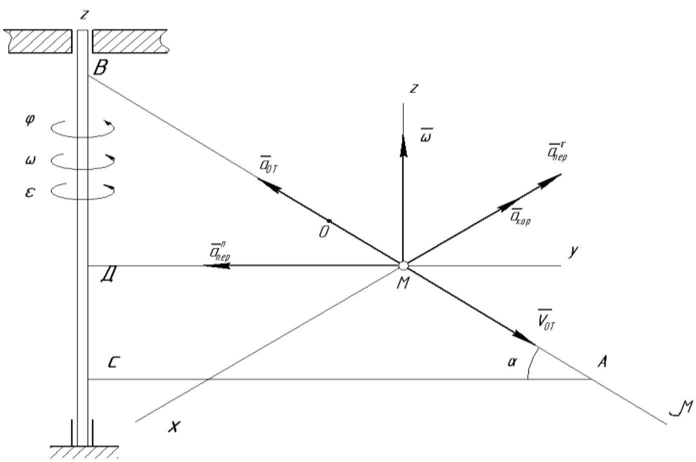


Рис. 72

3.Определим ω и ε.

$\omega = \dot{\varphi} = 8t + 2$, при $t = 1\,c$ $\quad \omega = 10\,\frac{рад}{c}$.

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 8\,\frac{рад}{с^2}.$$

Знаки указывают, что вращение треугольника является ускоренным.

4.Определим $\bar{a}_{OT}$.

$$a_{OT} = \dot{V}_{OT} = -\frac{5\pi^2}{9}\sin(\frac{\pi}{3}t).$$

При $t = 1\,с$ $a_{OT} = -4{,}7\,\frac{см}{с^2}$.

Знак указывает, что $\bar{a}_{OT}$ направлен в противоположную сторону $\bar{V}_{OT}$.

5. Определяем $\bar{a}_{пер}$. Вращение треугольника для точки М будет переносным, т.е. точка М движется по окружности радиуса МД=h

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер},$$

где $BM = BO + OM = 15 + 4{,}33 = 19{,}33$ см.

Тогда

$h = МД = BM \cdot \cos 30^0 = 16{,}7$ см

$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot h = 133{,}9\, см/с^2$,

$$a_{пер}^{n} = \omega^2 \cdot h = 1670\, {см}/{с^2}.$$

Вектор $\bar{a}_{пер}^{\tau}$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника АВС с учетом знака ε .

6. Определяем $\bar{a}_{кор}$

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |V_{OT}| \cdot \sin 120^0 = 45\, {см}/{с^2}.$$

Вектор $\bar{a}_{кор}$ совпадает с направлением $\bar{a}_{пер}^{\tau}$.

6.Определяем $\bar{a}_{аб}$.

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{OT} + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^{n} + \bar{a}_{кор}.$$

Для нахождения модуля $a_{аб}$ проводим оси Mxyz (рис.116) и вычисляем проекции всех векторов на эти оси:

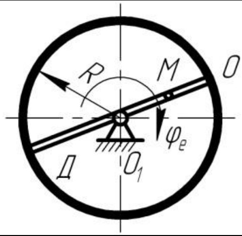
$$a_{абx} = -a_{пер}^{\tau} - a_{кор} = -133{,}9 - 45 \approx -179\, {см}/{с^2}.$$

$$a_{абy} = -a_{OT} \cos 30^0 - a_{пер}^{n} = -1674\, {см}/{с^2}.$$

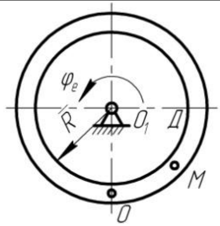
Окончательно находим

$$a_{аб} = \sqrt{a^2{}_{абx} + a^2{}_{абx} + a^2{}_{абz}} \approx 1684\, {см}/{с^2}.$$

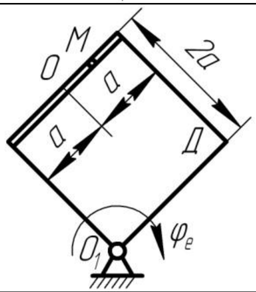
1



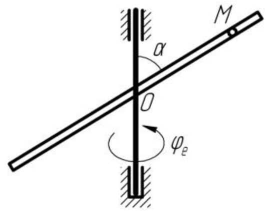
16



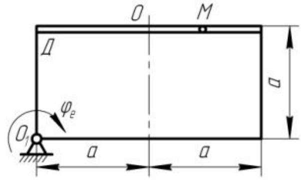
2



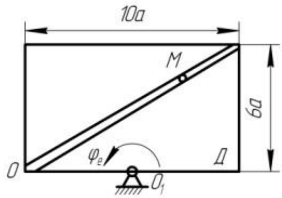
17



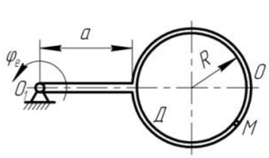
3



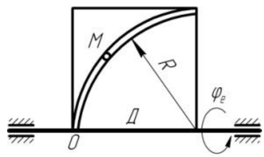
18



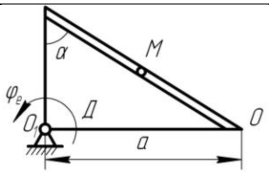
4



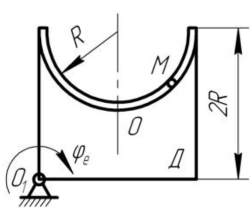
19



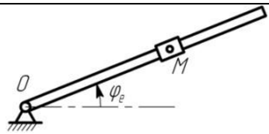
5



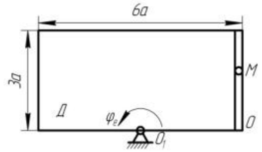
20



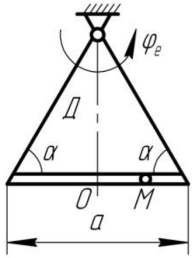
6



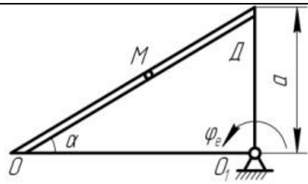
21



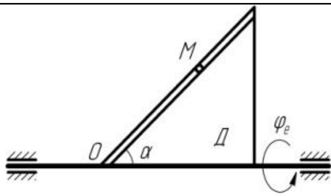
7



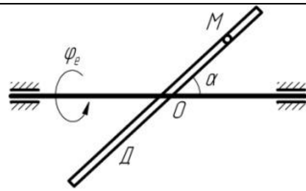
22



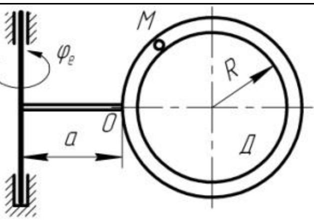
8



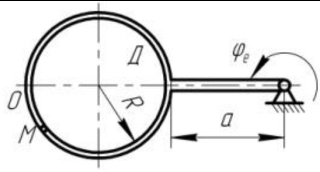
23



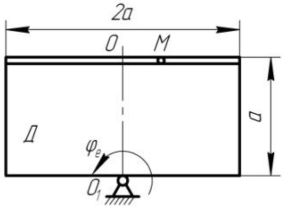
9



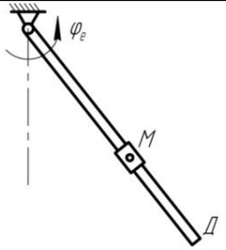
24



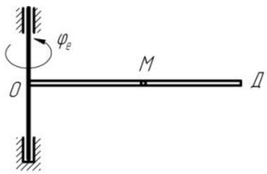
10



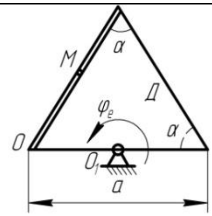
25



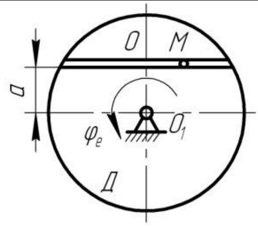
11



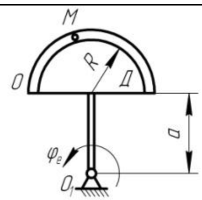
26



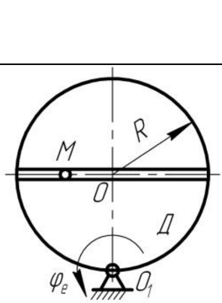
12



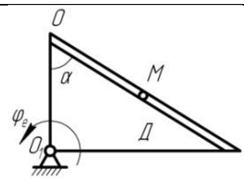
27

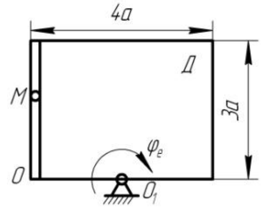
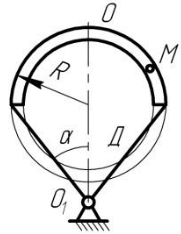
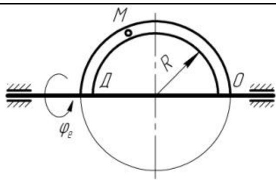
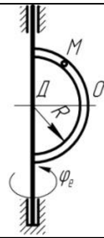


13



28



<table>
<tr>
<td>14

</td>
<td>29

</td>
</tr>
<tr>
<td>15

</td>
<td>30

</td>
</tr>
</table>

ГЛОССАРИЙ

АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЕ (ПОЛНОЕ ДВИЖЕНИЕ) – полное безотносительное движение.

АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ – наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия.

АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – движение, происходящее не по гармоническому закону.

ВЕКТОР – величина, характеризуемая не только числовым значением, но и направлением.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ – вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – колебания, совершаемые телом по синусоидальному закону.

ГОДОГРАФ – кривая, соединяющая концы векторов скоростей.

ДВИЖЕНИЕ – под движением в механике понимают изменение положения тела в пространстве по отношению к другим телам.

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ – три взаимно перпендикулярные оси, выходящие из одной точки.

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ – системы единиц.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ – оси естественного трехгранника.

ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ – показывает, как меняется путь с течением времени.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

КРИВИЗНА ТРАЕКТОРИИ – $k = \frac{1}{\rho}$ – величина, обратная радиусу кривизны ρ в этой точке.

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ – это точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ – это точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

МГНОВЕННАЯ ОСЬ ВРАЩЕНИЯ – ось, проходящая через мгновенный центр скоростей и перпендикулярная плоской фигуре.

НАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ – скорость тела в начальный момент времени.

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ – условия, которые определяют положение тела в начальный момент.

НАЧАЛЬНАЯ ФАЗА КОЛЕБАНИЙ. Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется фазой колебаний. Величина α – начальная фаза колебаний.

ОБОБЩЕННАЯ СКОРОСТЬ – это производные от обобщенных координат по времени.

ОСИ ВРАЩЕНИЯ. Прямая, проходящая через две неподвижные точки, называется осью вращения. При вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. Движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным движением.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СКОРОСТЬ. Скорость точки по отношению к подвижной системе отсчета называется относительной скоростью.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ – это ускорение точки, относительно подвижной системы отсчета.

ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе, является для точки переносным движением.

ПЕРЕНОСНАЯ СКОРОСТЬ. Скорость точки, неизменно связанной с подвижными осями в данный момент времени, называется переносной скоростью.

ПЕРЕНОСНОЕ УСКОРЕНИЕ. Ускорение той неизменно связанной с подвижными осями точки, с которой в данный момент времени совпадает движущая точка, называется переносным ускорением.

ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ – промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание: $T = \frac{2\pi}{k}$.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все перемещается параллельно некоторой фиксированной плоскости.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается параллельно самой себе.

СКОРОСТЬ – это векторная величина, показывающая как меняется путь с течением времени.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ – это движение точки по отношению к двум системам отсчета.

СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА. $\mathcal{V} = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$ – частота колебаний.

УГОЛ НУТАЦИИ – один из углов Эйлера.

УГЛЫ ЭЙЛЕРА – три угла, определяющие положение тела, имеющего одну неподвижную точку.

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ – числовые значения угловой скорости тела в данный момент времени равны первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}.$$

Размерность – рад/с или 1/с или с$^{-1}$.

УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ. Опытом установлено, что под действием силы тяжести $\bar{P}$ любое тело при свободном падении на Землю имеет одно и то же ускорение $\bar{g}$ и тогда

$$P = mg.$$

УСКОРЕНИЕ ТЕЛА УГЛОВОЕ. Векторная величина $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$, характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ. Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ АБСОЛЮТНОЕ. Это ускорение точки по отношению к неподвижной системе отсчета.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ.

$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{R}.$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ КАСАТЕЛЬНОЕ.

$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ КОРИОЛИСОВО.

$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}})$.

Кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки. Модуль кориолисова ускорения равен

$$a_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |V_{\text{от}}| \cdot sin\alpha.$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ НОРМАЛЬНОЕ.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ОСЕСТРЕМИТЕЛЬНОЕ.

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times \bar{V}.$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ. Относительным ускорением точки M называется ускорение по отношению к подвижной системе отсчета.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕНОСНОЕ. Ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки M по отношению к неподвижной системе отсчета, называется переносным ускорением.

ФАЗА КОЛЕБАНИЙ. Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется фазой колебания и определяет не только положение точки, но и её направление.

ФОРМУЛА ГАЛИЛЕЯ.

$$V = \sqrt{2gh}.$$

ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА.

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ или}$$

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y z. \end{aligned}\right\}$$

Содержание

Учебное издание

Валерий Николаевич Блохин

Адылин Иван Петрович

Теоретическая механика

«Кинематика»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Павлютина И. П.

Подписано в печать 18.06.2013 г. Формат $60x84^{1/}{}_{16}$
Бумага писчая. Усл. п.л.10,05. Тираж 60 экз. Изд. № 2361.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская обл., Выгоничский р-н, с. Кокино, Брянская ГСХА